HM II ETIT 7.3.2014 Lösungen

Aufgabe 1

$$A_a \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ wird auf Zeilennormalform transformiert.}$$

Das ergibt:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{13}(4+2\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 5+a & 8+\alpha-\frac{6}{13}(4+2\alpha) \end{array}\right\} \overline{(*)}$$

zu 1) Man liest ab aus $\overline{(*)}$:

$\underline{\text{rang}(A_a) = 4 \text{ für } a \neq -5}$

$\underline{\text{rang}(A_{-5}) = 3}$

$\underline{\text{Kern}(A_a) = \{\vec{0}\} \text{ für } a \neq -5}$

$\text{Kern}(A_{-5})$: $A_{-5}\vec{x} = \vec{0}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ bedeutet

gemäß $\overline{(*)}$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

woraus folgt: $\underline{\text{Kern}(A_{-5}) = \left\{\vec{x} \,\middle|\, \vec{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}}$

zu 2) Aus $\overline{(*)}$ liest man ab: $A_{-5}\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist lösbar

$$\Longleftrightarrow \quad 8+\alpha = \frac{6}{13}(4+2\alpha) \Longleftrightarrow \underline{\alpha = -80}$$

Für alle $\alpha \neq -80$ ist das vorgelegte Gleichungssystem nicht lösbar.

HM II ET IT 7.3.2014

Aufgabe 2

a) 1/ f ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen:

$$x-y,\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x^3$$

2/ Es gilt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ wegen

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0$ und wegen $\left|\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le |x|\sqrt{x^2+y^2}$

woraus $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ folgt.

$$F(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ ist die stetige Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^2$.

b/ (Dass das Max und Min existieren, braucht nicht begründet zu werden)

$f(x,y) = e^{x+y^2}$ soll extremal werden unter der Nebenbedingung

$g(x,y) = x^2+y^4-1 = 0$.

Die Punkte (x,y), in denen f extremal wird, sind unter den Lösungen der Gleichungen

$\nabla f = \lambda \nabla g$ und $g(x,y) = 0$ zu suchen.

d.h.
$$e^{x+y^2} = \lambda 2x \quad (1) \qquad \Rightarrow \lambda \neq 0,\ x \neq 0$$
$$2y\, e^{x+y^2} = \lambda 4y^3 \quad (2)$$
$$x^2+y^4 = 1 \quad (3)$$

$(1), (2) \Rightarrow \quad y x = y^3 \quad (4)$

HM4 ETIT 7.3.2014

$y = 0 \overset{}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}} x = \pm 1 \quad : \quad \underline{f(1,0) = e, \; f(-1,0) = \frac{1}{e}}$

$y \neq 0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} x = y^2 \overset{(3)}{\Longrightarrow} x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \underline{x = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{(3)}{\Longrightarrow} y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}}$

$$\underline{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = e^{\sqrt{2}}}$$

$\Longrightarrow$ <u>Das Maximum von f ist $e^{\sqrt{2}}$, das Minimum $\frac{1}{e}$.</u>

HM II ETIT 7.3.2014 Lösungen

Aufgabe 3

a) Es gilt $\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ besitzt auf $\mathbb{R}^3$ ein Potential $\phi = \phi(x,y,z)$. Es gilt damit

$$\underline{\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}} = \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0)) = \underline{\phi(1,1,1) - \phi(0,0,0)}.$$

Berechnen von ϕ (aus $\nabla\phi = \vec{F}$)

$$D_1\phi = y \Rightarrow \phi(x,y,z) = yx + h(y,z)$$

$$D_2\phi = x + \frac{z}{1+y^2} = x + \partial_y h(y,z) \Rightarrow h(y,z) = z\arctan(y) + g(z)$$

$$D_3\phi = \arctan(y) = \arctan(y) + g'(z) \Rightarrow g(z) = \text{Const}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \phi(x,y,z) = yx + z\arctan(y)$$

mit $\phi(1,1,1) = 1 + \frac{\pi}{4}$, $\phi(0,0,0) = 0$ gilt also:

$$\underline{\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1 + \frac{\pi}{4}}$$

b) $$\underline{\iint_K x^2 \, d(x,y)} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} r^2 \cos^2\varphi \, r \, dr \, d\varphi$$

$$\underline{= \frac{1}{4} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}}$$