Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjart 2015
03.03.2015

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ -4 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$-4\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & -\lambda \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(\lambda^2+3\lambda-4)+2(2\lambda-2)-4(-4\lambda+4) = (\lambda-1)(-\lambda^2-7\lambda+8) = -(\lambda-1)^2(\lambda+8)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $1, 1, -8$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2\to 2Z_2-Z_1;\, Z_3\to Z_3-Z_1]{Z_1\to -\frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(1) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun zur Berechnung des Eigenvektors zu dem Eigenwert -8.

$$A + 8I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\to Z_1+Z_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2\to Z_2+2Z_1]{Z_3\to Z_3+4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$\xrightarrow[Z_2\leftrightarrow Z_3]{Z_3\to -\frac{1}{18}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\to Z_1+4Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen mit Hilfe des (-1) Ergänzungstricks, dass

$$E_A(-8) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

gilt.

Die Vektoren $y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $y_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind die Eigenvektoren von A.

b) Die Vektoren y_1 und y_2 sind nicht orthogonal. Um ein Orthonormalsystem aus den Vektoren y_1, y_2, y_3 zu bilden verwenden wir das Gramm-Schmidt-Verfahren:

$$v_1 := y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$(y_2|v_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 1$$

erhalten wir

$$v_2 := y_2 - \frac{\langle y_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $y_1$ist zu den Vektoren u_1 und u_2 orthogonal. Wir normieren den Vektor y_3 und bekommen

$$v_3 := y_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 := \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$S = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $AS = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -16\sqrt{2} \\ 0 & -4 & -8\sqrt{2} \\ -3 & 1 & -16\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

$S^{-1}AS = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ gilt.

Aufgabe 2

a) Der Tangentenvektor im Punkt $\gamma(t)$ lautet $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$. Für die Bogenlänge ergibt sich

$$s(t) := \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{(-e^{-\tau}\cos\tau - e^{-\tau}\sin\tau)^2 + (-e^{-\tau}\sin\tau + e^{-\tau}\cos\tau)^2 + e^{-2\tau}}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \sqrt{3}e^{-\tau}\, d\tau = \sqrt{3}(1 - e^{-t}) \qquad t \in [0, \infty),$$

also gilt für die Länge der Kurve $L(\gamma) = s(\infty) = \sqrt{3}$. Wegen $t = t(s) = \ln{(1 - \frac{s}{\sqrt{3}})^{-1}}$ ist die Darstellung bezüglich der Bogenlänge (bzw. die natürliche Parametrisierung) gegeben durch

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} (1 - \frac{s}{\sqrt{3}}) \cos\left(\ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s} \right) \\ (1 - \frac{s}{\sqrt{3}}) \sin\left(\ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-s} \right) \\ (1 - \frac{s}{\sqrt{3}}) \end{pmatrix} \qquad (s \in [0, \sqrt{3}\,)).$$

b) Es gilt $\nabla f(x,y) = (y - \frac{50}{x^2}, x - \frac{20}{y^2}) \stackrel{!}{=} (0,0)\,, x,y \in (0,\infty)$ genau dann, wenn $x^2y = 50$ und $xy^2 = 20$ ist. Somit gilt $x = \frac{5}{2}y,\ x^3y^3 = 1000$. Die Funktion f besitzt auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$ genau einen kritischen Punkt $(5\,,2)$.

Die Hesse-Matrix H_f der Funktion f an der Stelle $(5\,,2)$ ist $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte λ_1, λ_2 von $H_f(5\,,2)$ sind die Lösungen der Gleichung $H_f(5\,,2) - \lambda I = \lambda^2 - \frac{29}{5}\lambda + 3 = 0$. Offensichtlich gilt $\lambda_1 > 0\,, \lambda_2 > 0$ weil $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3 > 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{29}{5} > 0$.
Die Funktion f hat im Punkt $(5\,,2)$ ein lokales Minimum.

Aufgabe 3

a) Die Funktion $\vec{v}$ ist stetig differenzierbar. $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x}{2(y+z)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3x}{2(y+z)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{2}{2(y+z)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{1}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{2(y+z)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

Es sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein zugehöriges Potential. Da $\partial_x g(x,y,z) = \frac{2}{(y+z)^{\frac{1}{2}}}$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x,y,z) = \frac{2x}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $\partial_y g(x,y,z) = -\frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= -\frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = 0$, also $c(y,z) = c(z)$ gilt.Somit:

$$g(x,y,z) = \frac{2x}{(y+z)^{\frac{1}{2}}} + c(z)\,.$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x,y,z) = -\frac{x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}} + c'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $c'(z) = 0$. Wir wählen $c(z) = 0$ und haben damit das Potential

$$g(x,y,z) = \frac{2x}{(y+z)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

b) Es gilt $\displaystyle\iint_K xy^2\, d(x,y) = \int_0^{\frac{1}{2}} x \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y^2\, dy\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2x}} y^2\, dy\, dx =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x)^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}\,.$

Für den Flächeninhalt von K gilt $\displaystyle A = \iint_K d(x,y) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dy\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2x}} dy\, dx =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2 \cdot (2x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,.$

c) Nach dem Gaußschen Integralsatz bzw. dem Divergenzsatz ist

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint_D (\nabla \cdot \vec{v}\,)\, d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x,y,z) = \partial_x x^2 + \partial_y y^2 + \partial_z z^2 = 2(x+y+z)$. Daraus folgt, dass

$$\iiint_D (\nabla \cdot \vec{v})\, d(x,y,z) \;=\; \iiint_D 2x\, d(x,y,z) \;+\; \iiint_D 2y\, d(x,y,z) \;+\; \iiint_D 2z\, d(x,y,z)\,.$$

ist. Wegen der Symmetrie des Gebietes gilt $\iiint_D 2x\, d(x,y,z) \;=\; \iiint_D 2y\, d(x,y,z) \;=0$. Wir berechnen nun das Integral $\iiint_D 2z\, d(x,y,z)$ und bekommen, dass $\iiint_D 2z\, d(x,y,z) \;=$ $2 \cdot \int_0^1 z \cdot \Big(\iint_{x^2+y^2 \leqslant z^2} d(x,y)\Big)\, dz \;= 2 \cdot \int_0^1 \pi z^3\, dz = \dfrac{\pi}{2}$ gilt.