Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Frühjahr 2016
08.03.2016

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (2 + 4 + 4 Punkte)

a) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Lösungvorschlag: $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4)$, also sind die Eigenwerte 0 und 4.

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 = -v_2.$$

Also ist die Menge der Eigenvektoren von A zum Eigenwert 0 die Menge $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ähnlich ist

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_2 = 3v_1.$$

Also ist die Menge der Eigenvektoren von A zum Eigenwert 4 die Menge $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Gegeben seien die Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmitt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$.

Lösungvorschlag: $\vec{c_1} = \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2}}\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{b_2} = \vec{v_2} - (v_2, c_1)\vec{c_1} = \vec{v_2}$, weil $(v_2, c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 0$ Deshalb

$$\vec{c_2} = \frac{\vec{v_2}}{\|\vec{v_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2}}\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ferner $\vec{b_3} = \vec{v_3} - (v_3, c_1)\vec{c_1} - (v_3, c_2)\vec{c_2}$. Da aber $(v_3, c_1) = (v_3, c_2) = 1$ bekommen wir $\vec{b_3} = \vec{v_3} - \vec{c_1} - \vec{c_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Deshalb $\vec{c_3} = \frac{\vec{b_3}}{\|\vec{b_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Vektoren $\vec{c_j}, j = 1, 2, 3$ sind die gesuchte Orthonormalbasis.

c) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösungvorschlag:

Mittels Zeilenumformungen, bekommen wir (die Zeilen werden mit Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnet).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deshalb ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x + \sqrt{2}y - z$, und $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Bestimmen Sie das Minimum und Maximum von f auf B.

Lösungsvorschlag: Sei $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Da auf der Niveauxkurve $g = 0$ gilt $\nabla g \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, gibt die Multiplikationsregel von Lagrange, dass an den Maximum und Minimumstellen von f auf B gilt $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ das anderes in verschiedenen Stellen sein kann. Da aber $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$, bekommen wir $\lambda \neq 0$ und $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda}$, $z = -\frac{1}{2\lambda}$, was zusammen mit der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gibt $\frac{1}{\lambda^2} = 1$ oder $\lambda = \pm 1$. Wenn $\lambda = 1$ bekommen wir $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$. Das gibt den Wert $f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) = 2$. Wenn $\lambda = -1$ bekommen wir $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$. Das gibt den Wert $f(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) = -2$. Also ist das Maximum von f 2 und das Minimum -2.

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y + 6, 1 \leqslant y \leqslant e\}.$$

Lösungsvorschlag: Da x als Funktion von y gegeben wird, ist die Länge von Γ gegeben durch $L = \int_1^e \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2} dy = \int_1^e \sqrt{1 + (\frac{y}{2} - \frac{1}{2y})^2} dy = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{4y^2}} dy = \int_1^e \sqrt{(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y})^2} dy = \int_1^e (\frac{y}{2} + \frac{1}{2y}) dy = (\frac{y^2}{4} + \frac{\ln y}{2})_{y=1}^{y=e} = \frac{e^2+1}{4}$.

c) Wir betrachten das Integral

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}^1 \frac{2e^{x^2}}{x+1}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich, vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

Lösungsvorschlag:

Der Integrationsbereich lautet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2, \sqrt{y+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\}$. Um die Integrationsordnung zu vertauschen ist es hilfreich die Gleichung $\sqrt{y+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = x$ bezüglich y zu lösen. Die Gleichung gibt $\sqrt{y+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + x$ und da $y \geqslant 0$ bekommen wir $y + \frac{1}{4} = (\frac{1}{2}+x)^2$ oder $y = x^2 + x$. Aus dieser Beabachtung und aus der Skizze des Integrationsbereichs folgt,

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}^1 \frac{2e^{x^2}}{x+1}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^2+x} \frac{2e^{x^2}}{x+1}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (x^2+x)\frac{2e^{x^2}}{x+1}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 2xe^{x^2} = (e^{x^2})|_{x=0}^{x=1} = e-1.$$

Aufgabe 3 (4+6 Punkte)

a) Sei $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z > 0\}$ und $\vec{w} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ mit $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a(y+z)^{-\frac{3}{2}} \\ -2x(y+z)^{-b} \\ -2x(y+z)^{-\frac{5}{2}} \end{pmatrix}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b so, dass $\vec{w}$ ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie für diese a, b ein zugehöriges Potential.

Lösungsvorschlag:

Die Funktion $\vec{v}$ ist stetig differenzierbar. $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$. Die Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10x}{2(y+z)^{\frac{7}{2}}} - b\frac{2x}{(y+z)^{b+1}} \\ +\frac{2}{2(y+z)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3a}{2(y+z)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{2}{(y+z)^{b}} + \frac{3}{2(y+z)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

hat die Lösung $b = \frac{5}{2}, a = \frac{4}{3}$.

Es sei $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein zugehöriges Potential. Da $\partial_x g(x,y,z) = \frac{4}{3(y+z)^{\frac{3}{2}}}$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x,y,z) = \frac{4x}{3(y+z)^{\frac{3}{2}}} + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $\partial_y g(x,y,z) = -\frac{2x}{(y+z)^{\frac{5}{2}}} + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= -\frac{2x}{(y+z)^{\frac{5}{2}}}$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = 0$, also $c(y,z) = c(z)$ gilt.Somit:

$$g(x,y,z) = \frac{4x}{3(y+z)^{\frac{3}{2}}} + c(z)\,.$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x,y,z) = -\frac{2x}{(y+z)^{\frac{5}{2}}} + c'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $c'(z) = 0$. Wir wählen $c(z) = 0$ und haben damit das Potential

$$g(x,y,z) = \frac{4x}{(y+z)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

b) Wir betrachten die Fläche $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - 2x^2, x^2 + y^2 \leqslant 5\}$ und ihren positiv orientierten Rand $\partial\mathcal{F}$. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + x \\ 2x + 3z \\ y + 5z \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Satzes von Stokes.

Lösungsvorschlag:

Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iint_{A} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot [\vec{g_x} \times \vec{g_y}]\, d(x, y)$$

wobei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 5\}$ und $\vec{g} = (x, y, y^2 - 2x^2)^T$.
Wir berechnen $\operatorname{rot} \vec{v}$ und becommen, dass $\operatorname{rot} \vec{v} = (-2, 1, 2)^T$. Deshalb gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v} \cdot [\vec{g_x} \times \vec{g_y}] = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \right] = (8x - 2y + 2)$$

und

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{A} 2dxdy = 2\mathcal{F}(A) = 10\pi,$$

wobei $\mathcal{F}(A)$ den Flächeninhalt von A bezeichnet. Die Integrale $\iint\limits_A xdxdy, \iint\limits_A ydxdy$ verschwinden, weil A symmetrisch ist bezüglich der x, y Achsen.