Klausur F2018 Aufgaben und Lösungen

Sonntag, 31. Juli 2022 12:09

Klausur F2018...

Klausur F2018 Aufgaben und Lösungen

Monday, 19 July 2021 13:07

Klausur
F2018...

Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Frühjahr 2018
Institut für Analysis 09.03.2018
Dr. I. Anapolitanos

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (3 + (4 + 2 +1) Punkte)

a) Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A. Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei $B = (0.8, 1.5) \times (-1.5, -0.5)$ und $f : B \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \ln(1 + x^2 + y).$$

(i) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f der Ordnung 1 um den Entwicklungspunkt $(1,-1)$. Approximieren Sie damit den Funktionswert $f(0.9, -0.9)$.

(ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \vec{v}}$, wobei $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Zeigt $\vec{v}$ in die Richtung des stärksten Anstiegs in (1,-1)? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Bestimmen Sie einen Vektor der im Punkt $(1,-1,f(1,-1))$ orthogonal zu der Fläche $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B, z = f(x,y)\}$ ist.

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

a) Es seien $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + y, \qquad h(x,y) := x^2 + y^2.$$

Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von f in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) \leqslant 5\}$.

b) Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^7}{x^6+y^6}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g stetig in $(0,0)$ ist, und dass g nicht differenzierbar in $(0,0)$ ist.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(4 + 3 + 3 Punkte)**

a) Wir betrachten das Integral $\int_0^8 \int_{y^{1/3}}^2 \sin(x^4)\, dx\, dy$. Skizieren Sie den Integrationsbereich vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{w}(x,y) := \begin{pmatrix} axy + y^2 \\ \frac{x^2}{2} + 2axy + y^2 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in \mathbb{R}$ gibt so dass $\vec{w}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie für dieses a ein zugehöriges Potential.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\frac{t^3}{3} - t, t^2)$.

Aufgabe 4 **(4 + 6 Punkte)**

a) Es sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$$

sowie die Menge $A \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1, \ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch ∂A, genauer, das Integral $\iint_{\partial A} \vec{v} \cdot \vec{n}\, do$, wobei $\vec{n}$ das äußere Normalenvektorfeld an den Rand ∂A von A bezeichne.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilmenge der Einheitskugel gegeben durch

$$B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\, x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse liegen ab Dienstag den **17.04.2018** neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30).

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **19.04.2018**, von 16 bis 18 Uhr im Fasanengarten Hörsaal (Geb.50.35) statt.

Die müdlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **23.04.2018** bis **27.04.2018**.

(1a) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)+1 = \lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$.

Also ist 2 der einzige Eigenwert von A.

$(A-2I)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1=v_2$.

Also haben alle Eigenvektoren zum Eigenwert 2 die Form $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$. Also hat 2 geometrische Vielfachheit 1 und algebraische Vielfachheit 2. Somit ist A nicht diagonalisierbar.

(1b) (i) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y} \\ \frac{1}{1+x^2+y} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(1,-1)=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $(*)$

Also lautet das Taylorpolynom

$$f(1,-1) + \nabla f(1,-1)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \ln(1+1-1)+2(x-1)+(y+1)$$

$$= 2x+y-1.$$

Die Approximation bekommt man, wenn man (x,y) durch durch $(0{,}9, -0{,}9)$ ersetzt:

$$2\cdot 0.9+(-0.9)-1 = -0.1.$$

(ii) $\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \vec{v}} \underset{\text{differenzierbar}}{\overset{D_a f}{=}} \nabla f(1,-1)\cdot\vec{v} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht parallel zu $\nabla f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ deshalb zeigt er nicht in die Richtung des stärksten Anstiegs in $(1,-1)$.

(iii) Die Gleichung der Fläche hat die Form $G(x,y,z)=0$, wobei $G(x,y,z) = f(x,y) - z$. Somit ist ein solcher Vektor

$$\nabla G(1,-1,f(1,-1)) = \begin{pmatrix} f_x(1,-1) \\ f_y(1,-1) \\ -1 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=\!=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2a) kritische Punkte von f.

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da $1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} < 5$ liegt der kritische Punkt $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ in A. Deshalb muss der Wert

$$f\left(1,-\frac{1}{2}\right) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot 1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4} \quad (1)$$

berücksichtigt werden.

Jetzt untersuchen wir f auf ∂A der Multiplikationsregel von Lagrange.

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(1-\lambda) = 1 \\ y(1-\lambda) = -\frac{1}{2} \end{cases} \xleftrightarrow[\text{unmöglich da } 0 \neq 1]{\lambda = 1} \begin{cases} x = \frac{1}{1-\lambda} \\ y = -\frac{1}{2(1-\lambda)} \end{cases} \quad (2)$$

Aber auf ∂A gilt $x^2+y^2 = 5 \Rightarrow$

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{4(1-\lambda)^2} = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{4(1-\lambda)^2} = 5 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$\Leftrightarrow \lambda - 1 = \frac{1}{2}$ oder $\lambda - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$ oder $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$\lambda = \frac{3}{2} \xrightarrow{(2)} (x,y) = (-2,1).$$

Aber $f(-2,1) = (-2)^2 + 1^2 - 2(-2) + 1 = 10$. (3)

$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow (x,y) = (2,-1)$. Aber

$f(2,-1) = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 0$ (4)

(1), (3), (4) $\Rightarrow$ $\text{Max} f = \text{Max}\{-\frac{5}{4}, 0, 10\} = 10$.

$\text{Min} f = \text{Min}\{-\frac{5}{4}, 0, 10\} = -\frac{5}{4}$.

<u>Bem</u>: Die Lagrange Regel war anwendbar da $\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$ auf ∂A

(b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$0 \leq |g(x,y)| = \frac{|x|^7}{x^6+y^6} = \underbrace{\frac{x^6}{x^6+y^6}}_{\leq 1} |x| \leq |x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$$

Somit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$ also ist g stetig in $(0,0)$. Nun beobachten wir, dass

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^7}{h^6+0^6} - 0}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^7}{0^6+h^6} - 0}{h} = 0.$$

Wenn g in $(0,0)$ differenzierbar wäre dann $g'(0,0) = \left(g_x(0,0) \;\; g_y(0,0)\right) = (1 \; 0)$ und deshalb

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)-g(0,0)-(1\;0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{\|(x,y)\|}$$ wäre 0.

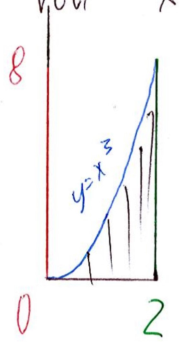
Aber $$\frac{g(x,y)-g(0,0)-(1\;0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{\|(x,y)\|} = \frac{\frac{x^7}{x^6+y^6} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \not\to 0.$$

Da $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to 0$ aber $$\frac{\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^7}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^6}} - \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{2}n}} \to -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0.$$

Also ist g nicht differenzierbar in $(0,0)$.

(3a). $I := \int_0^8 \int_{y^{\frac{1}{3}}}^2 \sin(x^4)\,dx\,dy$ ist ein Integral über den Bereich $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 8,\ y^{\frac{1}{3}} \le x \le 2\}$.

Da $x = y^{\frac{1}{3}} \overset{y>0}{\Longleftrightarrow} y = x^3$ ist die untere Grenze von x auf der Kurve $y = x^3$.



Wenn man den Bereich auf der x-Achse projeziert dann ist die Projektion das Intervall $[0,2]$.

Also $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^3\}$.

Also $I = \int_0^2 \int_0^{x^3} \sin(x^4)\,dy\,dx = \int_0^2 x^3 \sin(x^4)\,dx$

$$= -\left[\frac{\cos(x^4)}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \cos(16)\right).$$

~~3b kommt nach 3c $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend~~

~~(3b) $\frac{\partial w_1}{\partial y} = x + 2y$, $\frac{\partial w_2}{\partial x} = x + 2y \Longrightarrow w$ Potentialfeld.~~

~~Ist f ein Potential dann $f_x = xy + y^2 \Rightarrow$~~

~~$f = \frac{x^2}{2}y + xy^2 (+ c(y))$. $\Longrightarrow f_y = \frac{x^2}{2} + 2xy + c'(y) \overset{!}{=} \frac{x^2}{2} + 2xy + y^2$~~

~~Also $c'(y) = y^2 \rightsquigarrow c(y) = \frac{y^3}{3}$ ist eine mögliche Wahl~~

(3b) $\frac{\partial w_1}{\partial y} = ax+2y, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} = x+2ay.$ Also

$\vec{w}$ Potentialfeld $\overset{\mathbb{R}^2 \text{ einfach}}{\underset{\text{zusammenhängend}}{\iff}} \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial x} \iff$

$ax+2y = x+2ay \iff (a-1)x = 2(a-1)y \iff a=1$

da die Gleichheit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten soll.

In diesem Fall $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} xy+y^2 \\ \frac{x^2}{2}+2xy+y^2 \end{pmatrix}.$

Für ein Potential f gilt $f_x = xy+y^2$

$\Rightarrow f = \frac{x^2}{2}y + xy^2 + c(y) \Rightarrow f_y = \frac{x^2}{2} + 2xy + c'(y)$

$\overset{!}{=} \frac{x^2}{2} + 2xy + y^2 \Rightarrow c'(y) = y^2 \rightsquigarrow c(y) = \frac{y^3}{3}$ ist eine möglich

Wahl. Somit is $f(x,y) = \frac{x^2}{2}y +$ [redacted] $xy^2 + \frac{y^3}{3}$ ein zugehöriges Potential!

(3c) $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \left\| \begin{pmatrix} t^2-1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\| dt =$

$\int_0^1 \sqrt{(t^2-1)^2+(2t)^2} = \int_0^1 \sqrt{t^4-2t^2+1+4t^2}\, dt$

$= \int_0^1 \underbrace{\sqrt{t^4+2t^2+1}}_{=(t^2+1)^2} dt = \int_0^1 (t^2+1)\,dt = t + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$

4a) $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = -1+1+2z = 2z.$

Also $\iint_{\partial A} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do = \iiint_A \operatorname{div} \vec{v} \, d(x,y,z) = \iiint_A 2z \, d(x,y,z).$

In Zylinderkoordinaten.

$A = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1, \; r \leq z \leq 1, \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$

Also $\iint_{\partial A} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(\int_r^1 2z \, dz \right) r \, dr \right] d\varphi$

aus Jacobi Determinante

$\underset{\varphi \text{ unabhängig}}{\overset{\text{Integrant}}{=}} 2\pi \int_0^1 \left(\int_r^1 2z \, dz \right) r \, dr$

$= 2\pi \int_0^1 \left(z^2 \Big|_r^1 \right) r \, dr = 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr =$

$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$

(4b). $\int_B d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\| \, d\theta \, d\varphi$, $d\sigma$

$$B = \left\{ \vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0, 2\pi], \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Also

$$\int_B d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\| \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \right\| d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big[(\sin^2\varphi \sin\theta\cos\theta + \cos^2\varphi \sin\theta\cos\theta)^2 + (\sin^2\theta \sin\varphi)^2 + (\sin^2\theta \cos\varphi)^2 \Big]^{\frac{1}{2}} d\theta \, d\varphi.$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta \cdot \sin^2\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\pi\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right).$$

Es gilt $B = \left\{ \vec{g}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}$.

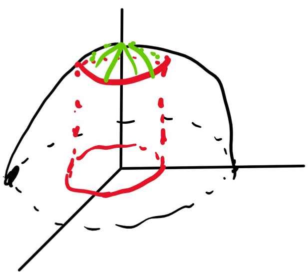
da $x^2+y^2 \le \frac{1}{2} \iff \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi \le \frac{1}{2} \iff$

$\sin^2\theta \le \frac{1}{2} \overset{\sin\theta \ge 0}{\iff} \sin\theta \le \frac{1}{\sqrt{2}}. \iff$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le 2\pi$ was

aber zusammen mit $z = \sqrt{1-x^2-y^2} \ge 0$

liefert nur $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.



Andererseits gilt

$\vec{g}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{g}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$.

und $\vec{g}_\varphi \cdot \vec{g}_\theta = -\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0.$

Also $\vec{g}_\varphi \perp \vec{g}_\theta$, deshalb $\|\vec{g}_\varphi \times \vec{g}_\theta\| = \|\vec{g}_\varphi\| \|\vec{g}_\theta\|$ (4)

aber $\|\vec{g}_\varphi\| = \sqrt{(-\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\sin\theta\cos\varphi)^2}$

$= \sqrt{\sin^2\theta\,\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1}} = \sqrt{\sin^2\theta} \underset{\sin\theta \ge 0}{=} \sin\theta$ (5)

$\|\vec{g}_\theta\|^2 = \left[(\cos\theta\cos\varphi)^2 + (\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-\sin\theta)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \left[\cos^2\theta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$

$$= \Big[\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=\frac{1}{2}}\Big]^{\frac{1}{2}} = 1. \quad (6)$$

(5),(6) $\rightarrow$ (4) $\Rightarrow \|\vec{g}_\varphi \times \vec{g}_\theta\| = \sin\theta.$

Also wird der Flächeninhalt gegeben durch.

$$\int_F 1\, do = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi} \|\vec{g}_\varphi \times \vec{g}_\theta\|\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

$$= \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \cdot 2\pi = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

<u>Bemerkung</u>: Natürlich kann man auch $\|\vec{g}_\varphi \times \vec{g}_\theta\|$ mit dem „traditionelen Weg" berechnen. Mit der Beobachtung $\vec{g}_\varphi \perp \vec{g}_\theta$ geht es ein bisschen schneller.