Nachklausur

Sonntag, 1. Mai 2022 16:29

Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Frühjahr 2022
22.04.2022

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 4 + 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ist die Matrix B diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{w}(x,y) := \begin{pmatrix} x + 4y \\ 4x + 2y \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x|y|^{1,5}}{x^2+y^2} + y, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie, ob g stetig ist in (0,0).

(ii) Sei $\vec{v} := \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Für welche $\theta \in [0, \pi)$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0)$? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie die Richtungsableitung gegebenenfalls.

Aufgabe 2 (6 + 6 + 8 Punkte)

a) Wir betrachten eine **symmetrische** Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$. Wir nehmen an, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind. Bestimmen Sie alle Eigenräume von A. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sie können eine Eigenschaft verwenden, die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix haben.

b) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Länge der Kurve γ.

c) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x,y) = x + y$ auf der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(8 + 4 + 10 Punkte)**

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $f(x,y) = xe^{x-2y}$ der Ordnung 1 um den Entwicklungspunkt $(2,1)$ und approximieren Sie damit den Wert $f(2.1, 0.9)$. Besitzt die Funktion f lokale Extremstellen? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wie bekannt aus der Vorlesung wird für $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^3$ und $r > 0$ die offene Kugel $K(\vec{x_0}, r)$ definiert durch

$$K(\vec{x_0}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{x_0}\| < r\}.$$

Für welche $\alpha > 0$ ist die Menge

$$K\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, 1\right) \bigcup K\left(\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}, \alpha\right)$$

wegzusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wir betrachten die Fläche

$$\mathcal{F} = \{(x, y, y^2 - x^2) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Oberflächenintegral $\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{n} do$, wobei das Normalenvektorfeld $\vec{n}$ nach oben zeigt.

Aufgabe 4 **(8 + 12 Punkte)**

a) Wir betrachten das Integral

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} \sin(3x^2 - x^3)\, dx\, dy.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich. Begründen Sie Ihre Skizze. Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

b) Sei

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3, \quad x \geqslant 0, \quad z \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\}.$$

Es sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y + e^x \\ x - ye^x \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Erstellen Sie eine Skizze des Bereichs A. In der Skizze sollen die x, y, z Achsen auftauchen. Begründen Sie Ihre Skizze.

(ii) Berechnen Sie Mit Hilfe des Divergenzsatzes und Mittels Kugelkoordinaten den Fluss von $\vec{v}$ durch ∂A, genauer, das Integral $\iint_{\partial A} \vec{v} \cdot \vec{n} do$, wobei $\vec{n}$ das äußere Normalenvektorfeld an den Rand ∂A von A bezeichne.

Viel Erfolg!

A 1 a) $\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$.

Also ist $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert von B

hat algebraische Vielfachheit 2

Also ist $\lambda=1$ der einzige Eigenwert von B und hat algebraische Vielfachheit 2.

$$(B-I)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff v_2=0$$

Also $E_B(1)=\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Deshalb $\dim \operatorname{Kern}(B-I)=1$ (geometrische Vielfachheit 1). Da $1 \neq 2$ ist B nicht diagonalisierbar.

(b)
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x+4y)=4\\ \frac{\partial w_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(4x+2y)=4\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial w_1}{\partial y}=\frac{\partial w_2}{\partial x} \xRightarrow[\text{zusammenhängend}]{\mathbb{R}^2 \text{ einfach}}$$

$\vec{w}$ ist ein Ponenzialfeld.

Wir wollen $\frac{\partial V}{\partial x} \stackrel{!}{=} w_1 = x+4y$, $\frac{\partial V}{\partial y} \stackrel{!}{=} w_2 = 4x+2y$.

$$\frac{\partial V}{\partial x} \stackrel{!}{=} x+4y \Rightarrow V=\int (x+4y)\,dx = \frac{x^2}{2}+4xy+c(y).$$

Also $\frac{\partial V}{\partial y} = 4x+c'(y) \stackrel{!}{=} 4x+2y$.

$\Rightarrow c'(y)=2y \leadsto c(y)=y^2$ ist eine mögliche Wahl

Also ist $V(x,y)=\frac{x^2}{2}+4xy+y^2$ ein zugehöriges Potential.

c) (i) Es gilt für $(x,y)\neq(0,0)$

$$|g(x,y)| \leq \frac{|x|\,|y|^{1.5}}{x^2+y^2}+|y| \leq \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\in[0,1]}\ \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\in[0,1]}|y|^{0.5}+|y|.$$

da $0\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ da $0\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$

da $0 \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2}$ da $0 \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$

Also $|g(x,y)| \le |y|^{0.5} + |y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$ Also $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$ deshalb ist g stetig in $(0,0)$.

(ii) für $t \neq 0$ $\frac{g(t\vec{v} + (0,0)) - g(0,0)}{t} = \frac{g(t\cos\theta, t\sin\theta) - g(0,0)}{t}$

$$\overset{*}{=} \frac{\frac{t\cos\theta\,|t\sin\theta|^{1.5}}{t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta} + t\sin\theta}{t} = \frac{\frac{t\,|t|^{1.5}}{t^2}\cos\theta\,|\sin\theta|^{1.5} + t\sin\theta}{t}$$

$$= \frac{|t|^{1.5}}{|t|^2}\cos\theta\,|\sin\theta|^{1.5} + \sin\theta = \frac{\cos\theta\,|\sin\theta|^{1.5}}{|t|^{0.5}} + \sin\theta.$$

Also $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\theta\,|\sin\theta|^{1.5}}{|t|^{0.5}} + \sin\theta$.

existiert nur wenn $\cos\theta\,|\sin\theta|^{1.5} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos\theta = 0$ oder $\sin\theta = 0$ $\overset{\theta\in[0,\pi)}{\Longleftrightarrow}$ $\theta = 0$ oder $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\theta = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \sin 0 = 0$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

(*) Denn für $t \neq 0$ $(t\cos\theta, t\sin\theta) \neq (0,0)$ da $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

2a) Da A symmetrisch ist, sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.

Da $\det(A - \lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)^1$ hat 3 algebraische Vielfachheit 1 also $\dim(A - 3I) = 1$ (weil A symmetrisch ist. Deshalb es ist nicht

A symmetrisch ist. Deshalb es ist nicht möglich, dass beide Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu 3 sind. Da

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1 \neq 0$$

sind diese Eigenvektoren nicht orthogonal. Deshalb müssen sie beide Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert sein. Insgesamt müssen sie beide Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sein. Also $\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \subseteq E_A(1)$ (1)

Da aber 1 algebraische Vielfachheit 2 hat $\xRightarrow{A \text{ symmetrisch}}$ $\dim E_A(1) = 2 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$E_A(1) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 muss orthogonal zu $E_A(1)$ also in $\mathbb{R}^3$ parallel zu

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Also

$$E_A(1) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(b) $\gamma'(t) = \begin{pmatrix}(e^t \sin t)' \\ (e^t \cos t)'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(e^t)'\sin t + e^t(\sin t)' \\ (e^t)'\cos t + e^t(\cos t)'\end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix}\sin t + \cos t \\ \cos t - \sin t\end{pmatrix}$

Also $|\gamma'(t)| = |e^t| \left\| \begin{pmatrix}\sin t + \cos t \\ \cos t - \sin t\end{pmatrix} \right\| =$

Also $\gamma'(t) = |e| \, \| (\cos t - \sin t) \| -$

$= e^t \sqrt{\left((\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 \right)}$

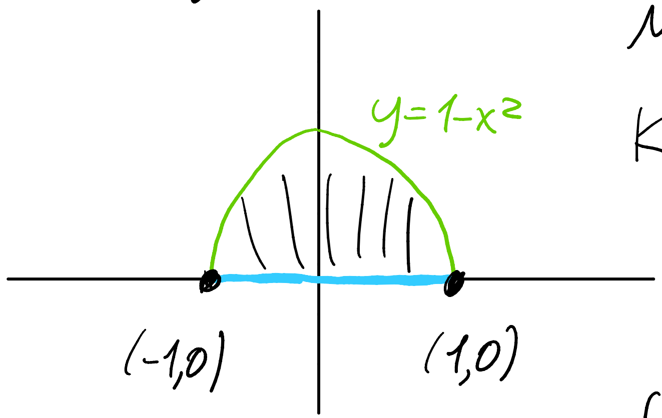
$= e^t \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} + \cancel{2\cos t \sin t} + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} - \cancel{2 \cos t \sin t}}$

$= e^t \sqrt{2}.$

Also Länge $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{2} dt$

$= e^t \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{2} = (e^{2\pi} - 1)\sqrt{2}.$

(c) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ also hat f keine kritische Punkte. Also wird das Minimum von f auf einem Randpunkt angenommen.



Wir wollen Maximum und Minimum von f in der Menge

$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2 \}$

bestimmen.

Da

$\begin{cases} y = 0 \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

schneiden sich die zwei Teile des Randes in $(-1,0)$, $(1,0)$.

Im blauen Teil $(x,0)$ $x \in [-1,1]$ gilt

hat Minimum -1 und Maximum 1

im blauen Teil $(x,0)$ $x\in[-1,1]$ gilt

$f(x,0)=x$ hat Minimum -1 und Maximum 1

im grünen Teil $(x, 1-x^2)$ $x\in[-1,1]$ gilt

$g(x)= f(x,1-x^2)= x+1-x^2.$

gilt $g'(x) = 1-2x=0 \iff x=\frac{1}{2}\in[-1,1]$

Aber $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

(die Randpunkte von g müssen nicht erneut untersucht werden, weil sie gleich wie die Randpunkte des blauen Teiles sind).

Also $\operatorname{Min} f=\min\left\{-1,1,\frac{5}{4}\right\}=-1$, $\operatorname{Max} f=\max\left\{-1,1,\frac{5}{4}\right\}=\frac{5}{4}.$

(A 3a) $f_x(x,y)= e^{x-2y}+xe^{x-2y}=(x+1)e^{x-2y}$ (2)

$f_y(x,y) = -2xe^{x-2y}.$ (3)

Also $\nabla f=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}(x+1)e^{x-2y}\\-2x\,e^{x-2y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \overset{e^{x-2y}\neq 0}{\iff} \begin{cases}x+1=0\\x=0\end{cases}$

was unmöglich ist deshalb besitzt f keine lokalen Extremstellen.

Da $f(2,1)=2e^{2-1\cdot 1}=2$

$f_x(2,1)=(2+1)e^{2-2\cdot 1}=3.$ $f_y(2,1)=-2\cdot 2\,e^{2-2\cdot 1}=-4$

ist das gesuchte Taylorpolynom

$P(x,y)=f(2,1)+f_x(2,1)(x-2)+f_y(2,1)(y-1)=2+3(x-2)-4(y-1).$

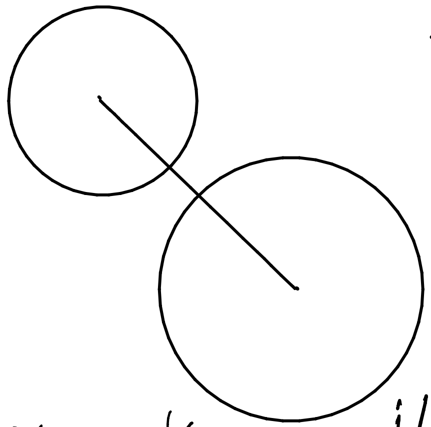
und $f(2.1,0.9)\approx P(2.1,0.9)=2+3(2.1-2)-4(0.9-1)$

$\Rightarrow f(2.1,0.9)\approx 2+0.3+0.4=2.7$

und $f(2.1,0.9) \approx f(2,1) + 3(2.1-2) + 4(0.9-1)$

$$\Rightarrow f(2.1,0.9) \approx 2+0.3+0.4 = 2.7.$$

(b)



Das ist der Fall wenn die Summe der Radien der Kugel größer ist als der Abstand der Zentren (Gleichheit reicht nicht weil die offenen Kugeln ihre Randpunkte nicht enthalten.

Also $1+\alpha > \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| \Leftrightarrow$

$$1+\alpha > \sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2+(3-4)^2} = \sqrt{4^2+2^2+1^2} = \sqrt{21} \Leftrightarrow$$

$$\alpha > \sqrt{21}-1.$$

(c). Da die Fläche durch die Parametrisierung $\{g(x,y) : x,y \in C\}$ gegeben wird, wobei

$g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y^2-x^2 \end{pmatrix}$ und $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$.

Ist $g_x \times g_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$

und da $1 > 0$ zeigt $g_x \times g_y$ nach oben.

Also $\iint_F \vec{v} \cdot \vec{n} \, do = \iint_C \vec{v} \cdot \vec{g}_x \times \vec{g}_y \, d(x,y)$

Also $\iint_{\tilde{F}} \vec{v}\cdot\vec{n}\,do = \iint_C \vec{v}\cdot(\vec{g}_x \times \vec{g}_y)\, d(x,y)$

$$= \iint_C \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} d(x,y) = \iint_C 2(x^2+y^2)\, d(x,y)$$

Da aber in Polarkoordinaten

$$x^2+y^2 \le 4 \iff 0 \le r \le 2 \text{ und } 0 \le \varphi \le 2\pi$$

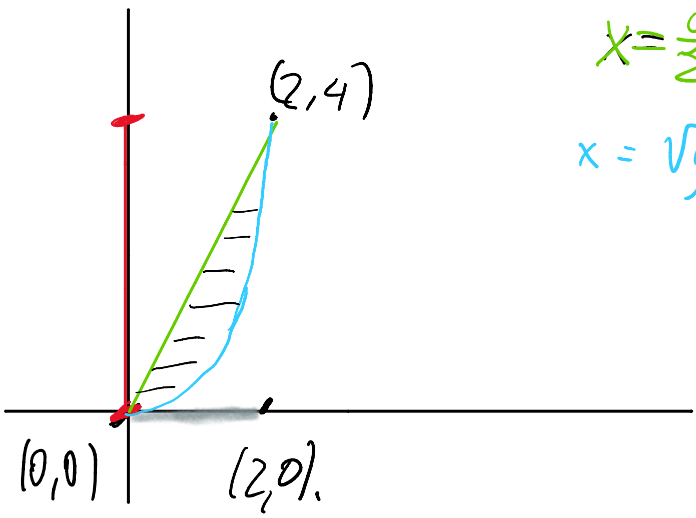
Gilt $\displaystyle\iint_{\tilde{F}} \vec{v}\cdot\vec{n}\,do = \int_0^2\int_0^{2\pi} 2r^2\, \underbrace{r}_{\text{aus der Jacobi Determinante.}}\, d\varphi\, dr$

$$= 4\pi \int_0^2 r^3\, dr = 4\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{r=2} = \pi \cdot 2^4 = 16\pi.$$

A 4 a) $I := \displaystyle\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} \sin(3x^2 - x^3)\, dx\, dy.$

Der Integrationsbereich ist

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 4,\ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y} \right\}.$$



$x = \frac{y}{2} \iff y = 2x$

$x = \sqrt{y} \overset{y \ge 0}{\iff} y = x^2$

Die Kurven schneiden sich wenn

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x^2 = 2x \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \text{ oder } x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ \text{oder} \\ (x,y) = (2,4). \end{cases}$$

$x=0$ oder $x=2$ } oder $(x,y)=(2,4)$.

Wenn wir die Reihenfolge vertauschen bekommen wir

$$I=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}\sin(3x^2-x^3)\,dy\,dx=\int_0^2\underbrace{(2x-x^2)\sin(\underbrace{3x^2-x^3}_{u})\,dx}_{=\frac{du}{3}}$$

Sei $u=3x^2-x^3$ dann $du=(6x-3x^2)dx=3(2x-x^2)dx$

$$\Rightarrow (2x-x^2)dx=\frac{du}{3}$$

$x=0\Rightarrow u=0$ $\quad$ $x=2\Rightarrow u=3\cdot2^2-2^3=4$.

Also $I=\int_0^4\frac{du}{3}\sin u=-\frac{\cos u}{3}\Big|_{u=0}^{u=4}=\frac{1-\cos 4}{3}$.

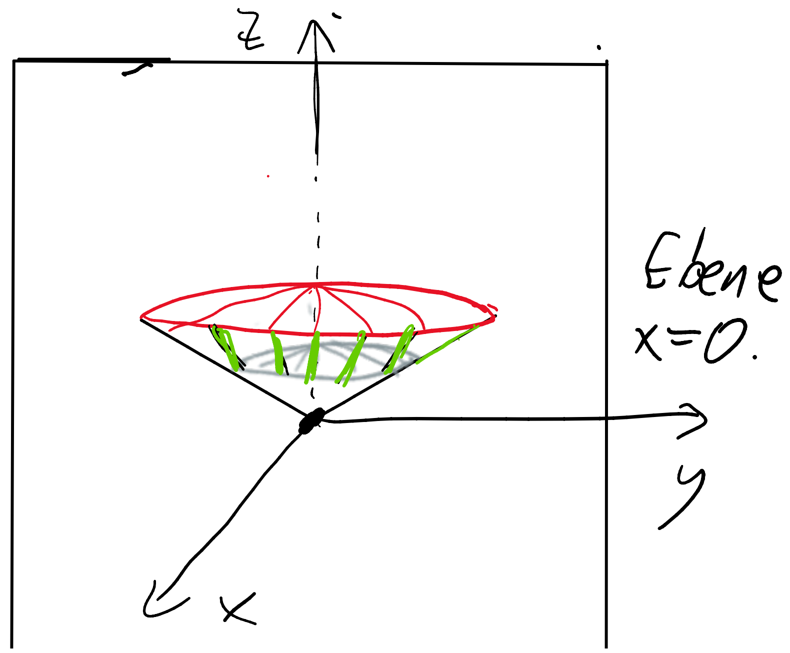
(4b) (i) $1\le x^2+y^2+z^2\le 3$ $\quad$ $x\ge 0$ $\quad$ $z\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$

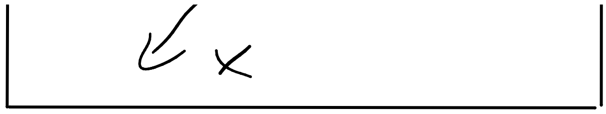
außerhalb der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius 1.

innerhalb der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$

auf der x-Positiven Seite der yz Ebenen

über den Kegel $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$





(ii) $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(y+e^x) + \frac{\partial}{\partial y}(x-ye^x) + \frac{\partial}{\partial z} z^2$$

$$= e^x - e^x + 2z = 2z.$$

Also nach dem Divergenzsatz.

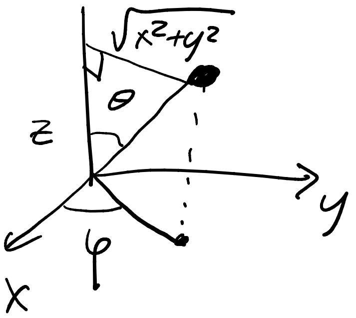
$$\iint_{\partial A} \vec{v}\cdot\vec{n}\, do = \iiint_A \operatorname{div}\vec{v}\, d(x,y,z) = \iiint_A 2z\, d(x,y,z).$$

In Kugelkoordinaten

$1 \le r \le \sqrt{3}$ wie oben begründet

$$z \ge \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \xRightarrow{\text{für } (x,y,z)\neq(0,0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \le \sqrt{3}. \Rightarrow$$

$$\tan\theta \le \sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta \le \tan\frac{\pi}{3} \underset{\text{weil } z\ge 0}{\overset{\text{da } \theta\le\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow}} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}.$$



$$x \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Also

$$\iint_{\partial A} \vec{v}\cdot\vec{n}\, do = \int_1^{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2r\cos\theta \underbrace{r^2\sin\theta}_{\text{Jacobi Determinante}}\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

$$= \left(\int_1^{\sqrt{3}} r^3\, dr\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \left(\int_1 r^3\,dr\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}} d\varphi\right)\int_0 \underbrace{2\sin\theta\cos\theta}_{=\sin 2\theta}\,d\theta$$

$$= \left(\frac{r^4}{4}\Big|_{r=1}^{r=\sqrt{3}}\right)\cdot \pi \left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$= \frac{9-1}{4}\cdot\pi\ \frac{1-\cos\frac{2\pi}{3}}{2} = 2\pi\cdot\frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$