Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Frühjahr 2023
29.03.2023

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 4 + 6 + 6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Der Punkt $M \in \mathbb{R}^3$ hat kartesische Koordinaten $(1, 1, \sqrt{2})$. Bestimmen Sie die Kugelkoordinaten des Punktes M.

c) Für Welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4-a \end{pmatrix}$ positiv definit? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Wir betrachten die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$.

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind beide Vektoren $\vec{v_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v_2} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren der Matrix B? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (14 + 8 Punkte)

a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass g 'längs jeder Geraden' stetig ist in $(0, 0)$ d.h. für jedes feste $\phi \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{r \to 0} g(r \cos\phi, r \sin\phi) = 0$.

(ii) Ist g stetig in (0,0)? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Sei $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ auf Existenz und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

b) Bestimmen Sie das Minimum und Maximum der Funktion

$$f(x, y, z) = (4x + 2y + 2z)\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2}$$

auf der Menge $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 7\}$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(8 + 6 + 4 Punkte)**

a) Wir betrachten die Fläche

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = y^2 - \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4 - x^2, \quad x \geqslant 0\}.$$

Bestimmen Sie den Wert des Oberflächenintegrals

$$\iint_{\mathcal{F}} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + 4y^2}} do.$$

b) Wir betrachten die Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2x + 4y - 1\}$ und das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{ds},$$

wobei ∂D den positiv orientierten Rand von D bezeichnet.

<u>**Hinweis**</u>: Hier könnte eine quadratische Ergänzung nützlich sein.

c) Wir betrachten ein C^1 Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Fläche

$$\mathcal{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = 1 - (x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Wir nehmen an, dass $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ d.h. die Divergenz des Vektorfeldes Null ist. Ein Student behauptet, dass aus den gegebenen Informationen folgt, dass der Fluss des Vektorfelds $\vec{v}$ durch $\mathcal{G}$ gleich Null ist. Hat der Student Recht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 **(8 + 12 Punkte)**

a) Wir betrachten das Integral

$$\int_{-1}^{2} \int_{\max(-\sqrt{3}x, 0)}^{\sqrt{4-x^2}} 2\sqrt{1 + x^2 + y^2} dy dx.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich und Begründen Sie Ihre Skizze. Bestimmen Sie den Wert des Integrals.

b) Sei B der beschränkte Bereich, der von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ eingeschlossen wird. Es sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} -x \\ 2yz \\ z \end{pmatrix}.$$

(i) Erstellen Sie eine Skizze des Bereichs B. In der Skizze sollen die x, y, z Achsen auftauchen und die Schnittpunkte von B mit den Achsen.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Fluss von $\vec{v}$ durch ∂B, genauer, das Integral $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} do$, wobei $\vec{n}$ das äußere Normalenvektorfeld an den Rand ∂A von A bezeichne. Begründen Sie die Wahl der Integrationsgrenzen.

Viel Erfolg!

(1a) $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial(1+y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial(1+x)}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$ auf $\mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{zusammenhängend}]{\mathbb{R}^2 \text{ einfach}}$

$\vec{v}$ ist Potentialfeld.

$\nabla f \stackrel{!}{=} \vec{v} \iff \begin{cases} f_x = 1+x & (1) \\ f_y = 1+y & (2) \end{cases}$

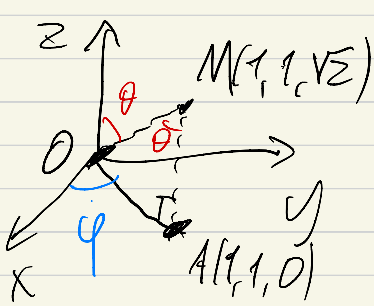
$(1) \rightsquigarrow f = x + \frac{x^2}{2} + c(y) \Rightarrow f_y = c'(y) \underset{(2)}{\stackrel{!}{=}} 1+y.$

$\rightsquigarrow c(y) = y + \frac{y^2}{2}.$

Also ist $x + \frac{x^2}{2} + y + \frac{y^2}{2}$ ein zugehöriges Potential

(1b) $r = \sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2.$

Da $x=1, y=1$ ist die Projektion $A(1,1,0)$ von M auf der xy Ebene im ersten quadrant davon und auf der Winkelhalbierenden $y=x$ also $\varphi = \frac{\pi}{4}$



Andererseites $OA = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} = |AM|$

$\Rightarrow$ Also $\theta = \frac{\pi}{4}$, da das rechtwinklige Dreieck OAM gleichschenklig ist

(1c) Nach Hurwitz A positiv definit $\iff$ $a>0$ und $\det(A)>0$. (3)

Aber $\det(A) > 0 \iff a(4-a) - (\sqrt{3})^2 > 0 \iff$

$-a^2+4a-3 > 0 \iff -(a-2)^2+1 > 0 \iff$

$(a-2)^2 < 1 \iff |a-2| < 1 \iff a \in (1,3)$ (4)

(3),(4) $\Rightarrow$ A positiv definit $\iff a \in (1,3)$

(1c) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 2+b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff 1+a = 2+b \iff a-b=1$ (5)

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ b-2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff b-2 = 1-a \iff a+b=3$ (6)

Wegen (5),(6) sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ beide Eigenvektoren von A

$\iff \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-b)+(a+b)=1+3 \\ a+b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a=4 \\ a+b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=1. \end{cases}$

(2a)(i) $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \dfrac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \dfrac{r\cos^2\sin\varphi}{r^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}$. (7)

Ist $\sin\varphi \neq 0$ dann $\lim\limits_{r\to 0} g(r\cos\varphi, r\cos\varphi) \overset{(7)}{=} \dfrac{0}{0+\sin^2\varphi} = 0$.

Ist $\sin\varphi = 0$ dann

$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \overset{(7)}{=} 0 \to 0$. Also auf jeden Fall

$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \to 0$ für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$.

(ii) $g(x, x^2) = \dfrac{x^2 x^2}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{1}{2}$.

$g(x, -x^2) = \dfrac{x^2(-x^2)}{x^4+x^4} = -\dfrac{1}{2} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$

und $(x, x^2) \xrightarrow{x\to 0} (0,0)$ $(x,-x^2) \xrightarrow{x\to 0} (0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existiert nicht $\Rightarrow$ g nicht stetig in $(0,0)$.

(iii) $$\lim_{t\to 0} \frac{g(0+t, 0+3t) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2 3t}{t^4+(3t)^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3t^2}{9t^2+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{3}{9+t^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Also $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{1}{3}$.

(b) Auf A gilt $f(x,y,z) = (4x+2y+2z)\sqrt{7}$

Deshalb ist es äquivalent zu bestimmen

Min/Max von $g(x,y,z) := (4x+2y+2z)$

mit Nebenbedingung $h(x,y,z) = 7$, wobei

$h(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 - 7$, und mit $\sqrt{7}$ zu multiplizieren.

$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf A da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf A.

Nach Lagrange gilt also

$\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla h \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{2}{\lambda}, \; y = \frac{2}{\lambda}, \; z = \frac{1}{\lambda}. \quad (8) \\ \text{Aber } x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 7 \text{ auf } A \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 7 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Also $(x,y,z) = (2,2,1)$ oder $(-2,-2,-1)$

da $g(2,2,1) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 14$

und $g(-2,-2,-1) = -4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -14$.

ist $\max f = 14\sqrt{7}$ und $\min f = -14\sqrt{7}$.

(3a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y^2 - \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$ $(x,y) \in A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 4-x^2\}$

ist eine Parametrisierung von F.

Da $f_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$, $f_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}$ gilt

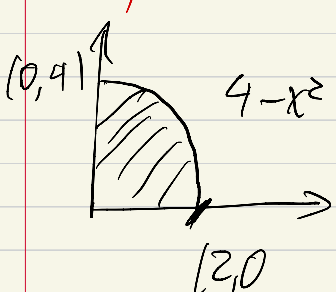
$$f_x \times f_y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|f_x \times f_y\| = \sqrt{1+x^2+4y^2}.$$

Also $$\iint_F \frac{x}{\sqrt{1+x^2+4y^2}}\, do = \iint_A \frac{x}{\sqrt{1+x^2+4y^2}} \sqrt{1+x^2+4y^2}\, d(x,y)$$

$$= \iint_A x\, d(x,y) \overset{(*)}{=} \int_0^2 \int_0^{4-x^2} x\, dy\, dx = \int_0^2 x(4-x^2)\, dx$$

$$= \int_0^2 (4x - x^3)\, dx = 2x^2\Big|_0^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 8 - \frac{16}{4} = 4$$

(*) Diese Gleichheit gilt weil



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 4-x^2\}$.

und $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

Also $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4-x^2\}$.

(b) $x^2 + y^2 \leq 2x + 4x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 \leq 4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 2^2$. Also ist D

Kreis um $(1,2)$ mit Radius 2

Lösung 1: Nach Gauß Green gilt

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d(x,y)$$

$$= -2 \iint_D d(x,y) = 2 \underbrace{F(D)}_{\text{Flächeninhalt von } D} = -2\, \pi \cdot 2^2 = -8\pi$$

Lösung 2: Eine Parametrisierung von D lautet

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 2 + 2\sin t \end{cases}, \; t \in [0, 2\pi] \quad \text{also} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2\cos t \\ 2 + 2\sin t \end{pmatrix} t \in [0, 2\pi]$$

Also $$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

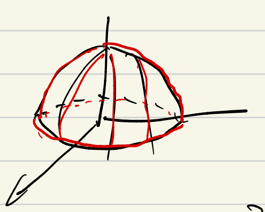
$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 + 2\sin t \\ -1 - 2\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-4\sin t - 4\sin^2 t - 2\cos t - 4\cos^2 t \right) dt$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} dt - 4 \int_0^{2\pi} \sin t\, dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt.$$

$$= -8\pi + 4\cos t \Big|_0^{2\pi} - 2\sin t \Big|_0^{2\pi} = -8\pi$$

da $\cos, \sin$ 2π-periodisch sind.

3c) 

Die Fläche G ist der Teil der Fläche $z = 1 - x^2 - y^2$ mit $x^2 + y^2 \le 1$ also $z \ge 0$. Sie schließt keinen dreidimensionalen Körper ein weshalb der Divergenzsatz nicht verwendbar ist. Deshalb hat der Student nicht Recht.

(4a). Der Integrationsbereich lautet

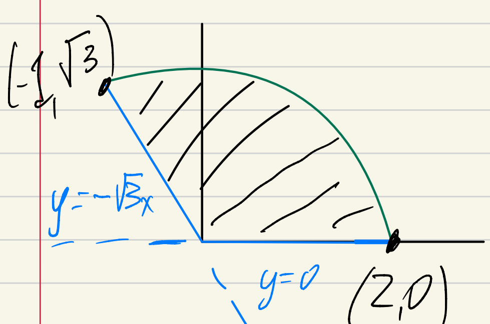
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 2,\ \max(-\sqrt{3}x, 0) \le y \le \sqrt{4-x^2}\}.$$

$y \ge 0 \rightsquigarrow$ über die x-Achse

$y \ge -\sqrt{3}x \rightsquigarrow$ über der Geraden $y = -\sqrt{3}x$.

$$y = \sqrt{4-x^2} \iff \begin{cases} y^2 = 4-x^2 \\ \text{und } y \ge 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{cases} y^2+x^2 = 2^2 \\ \text{und } y \ge 0 \end{cases}}_{\substack{\text{oberer Halbkreis mit} \\ \text{Zentrum } (0,0) \text{ und Radius } 2.}}$$

Also $y \le \sqrt{4-x^2}$ ist unter dem oberen Halbkreis mit Zentrum $(0,0)$ und Radius 2.



Schnittpunkt von $y=0$, $y=\sqrt{4-x^2}$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}.$$

Nur $(2,0)$ ist relevant, weil in B $x \ge -1$.

Schnittpunkt von $y=-\sqrt{3}x$, $y=\sqrt{4-x^2}$

$$\begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ y^2 = 4-x^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ 3x^2=4-x^2 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ 4x^2=4 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ x^2=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\sqrt{3}x \\ x=\pm 1 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(-1,\sqrt{3})$$

Da für $y=-\sqrt{3}x$, $x<0$ gilt $\tan\varphi=-\sqrt{3} \overset{\varphi\in(\frac{\pi}{2},\pi)}{\Longrightarrow}$

$\varphi=\arctan(-\sqrt{3})+\pi=\frac{2\pi}{3}$. Also in Polarkoordinaten ist $A=\{(r,\varphi):\ 0\leq r\leq 2,\ 0\leq\varphi\leq\frac{2\pi}{3}\}$

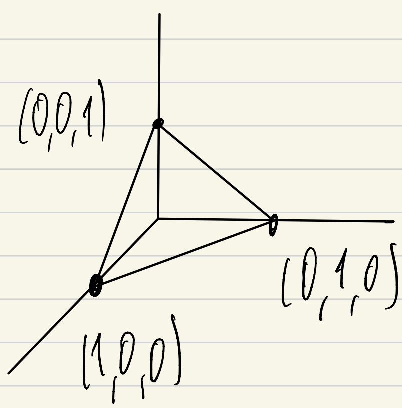
Also $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{\max(-\sqrt{3}x,0)}^{\sqrt{4-x^2}} 2\sqrt{1+x^2+y^2}\, d(x,y)$

$$=\int_0^2\int_0^{\frac{2\pi}{3}} 2r\sqrt{1+r^2}\,d\varphi\,dr=\underbrace{\int_0^{\frac{2\pi}{3}}d\varphi}_{=\frac{2\pi}{3}}\int_0^2 2r\sqrt{\underbrace{1+r^2}_{u}}\,dr$$

$du=2r\,dr$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_{1+0^2}^{1+2^2}\sqrt{u}\,du=\frac{2\pi}{3}\,\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=1}^{u=5}=\frac{4\pi}{9}\left(5^{3/2}-1\right).$$

4b i)



Die Ebene $x+y+z=1$ schneidet die x-Achse ($y=0 \wedge z=0$) in $(1,0,0)$ die y-Achse ($x=0\wedge z=0$) in $(0,1,0)$ und die z-Achse ($x=0\wedge y=0$) in $(0,0,1)$ in B gilt $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ und $x+y+z\leq 1$.

(ii) $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(2yz)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = -1 + 2z + 1 = 2z.$

Aus (i) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$.

Also $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}\, do = \iiint_B \operatorname{div}(\vec{v})\, d(x,y,z)$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 2z\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(z^2 \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \right) dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right) dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3}\, dx$$

$\frac{u=1-x}{du=-dx}$ $\int_{1-0}^{1-1} \frac{u^3}{3}(-du) = \int_0^1 \frac{u^3}{3}\, du = \frac{u^4}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$