Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
PD Dr. I. Anapolitanos
Dr. Michael Hofacker

Frühjahr 2024
27.03.2024

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (6 + 6 + 8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 1+2xy \end{pmatrix}$ ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential. Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$, wobei $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin t} \\ t \end{pmatrix}$.

b) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist. Geben Sie einen Beweis oder ein begründetes Gegenbeispiel an: Ist $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und existieren die partiellen Ableitungen $g_x(0,0), g_y(0,0)$, so ist g stetig in $(0,0)$.

c) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 3 & \beta \end{pmatrix}$$

genau dann den Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert -2 hat, wenn $\alpha = \beta = 1$. Geben Sie für $\alpha = \beta = 1$ eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine invertierbare Matrix S an, sodass $S^T A S = D$ gilt.

Aufgabe 2 (10 + 6 + 4 Punkte)

a) Wir betrachten ein Rechteck, das in der Menge $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 + \frac{y^2}{2} \leqslant 4\right\}$ liegt und dessen Seiten parallel zu der x- bzw. y-Achse sind. Bestimmen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt des Rechtecks. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- **(i)** Zeigen Sie, dass das Problem als ein Maximierungsproblem einer geeigneten Funktion f unter einer geeigneten Nebenbedingung $h(x,y) = 0$ geschrieben werden kann.
- **(ii)** Lösen Sie das Maximierungsproblem aus Teil **i)** mithilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange.

b) Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{w}(x,y) : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{w}(x,y) = \frac{1}{(x^2+4y^2)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und das Gebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}.$$

Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{w}$ durch den Rand von G durch direkte Berechnung eines geeigneten Kurvenintegrals.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^4$ lokale Extremstellen besitzt.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (6 + 6 + 8 Punkte)

a) Seien

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

der Einheitsball bzw. die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Wenden Sie den Divergenzsatz auf das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{v}(\vec{r}) = \vec{r}$ an und zeigen Sie auf diese Weise, dass der Flächeninhalt von S genau dreimal so groß wie das Volumen von B ist.

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die die Gleichung $f(\lambda\vec{x}) = \lambda^\alpha f(\vec{x})$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda > 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $(\nabla f(\vec{x})) \cdot \vec{x} = \alpha f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

c) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} + \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$. Außerdem gelte $\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \vec{ds} = 2\pi$, wobei $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot \vec{ds}$, wobei $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) := \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (8 + 12 Punkte)

a) Wir betrachten die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = \frac{x^3}{3} - \frac{z^2}{2}, \ 0 \leqslant z \leqslant e - e^x, x \geqslant 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie den Wert des Oberflächenintegrals

$$\iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2 + x^4}} \, do \, .$$

b) Wir betrachten den Bereich

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad |y| \leqslant x, \quad \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leqslant z \leqslant \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

(i) Erstellen Sie eine Skizze von B. In der Skizze sollen die $x-, y-$, und $z-$Achsen auftauchen.

(ii) Berechnen Sie mittels Kugelkoordinaten den Wert des Integrals

$$\iiint_B z \, d(x, y, z).$$

Begründen Sie Ihre Wahl für die Grenzen der Kugelkoordinaten.

Viel Erfolg!

1a) $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} y^2 = 2y$

$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1+2xy) = 2y$

$\Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \xrightarrow[\text{zusammenhängend}]{\mathbb{R}^2 \text{ einfach}} \vec{v}$ ist Potentialfeld

$\vec{v} \overset{!}{=} \nabla f \rightsquigarrow f_x = y^2 \Rightarrow f(x,y) = xy^2 + c(y)$

Dann $f_y(x,y) = 2xy + c'(y) \overset{!}{=} 2xy+1 \Rightarrow c'(y) = 1$.

Also ist $c(y) = y$ eine mögliche Wahl weshalb

$f(x,y) = xy^2 + y$ ein mögliches Potential.

$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(e^{\sin\pi}, \pi) - f(e^{\sin 0}, 0)$

$= f(1,\pi) - f(1,0) = 1 \cdot \pi^2 + \pi - (1 \cdot 0^2 + 0) = \pi^2 + \pi$.

(1b) Sei $g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } xy = 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann $g_x(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\overbrace{g(x,0)}^{=0 \text{ da } x\cdot 0 = 0} - \overbrace{g(0,0)}^{=0 \text{ da } 0\cdot 0 = 0}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$.

ähnlich $g_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = 0$.

Denoch $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{g(x,x)}_{=1 \text{ für } x \neq 0 \text{ da } x \cdot x \neq 0} = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \neq \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ da } 0\cdot 0 = 0}}{g(0,0)}$

Deshalb ist g nicht stetig in $(0,0)$ obwohl $g_x(0,0)$, $g_y(0,0)$ existieren. Somit ist die Aussage falsch.

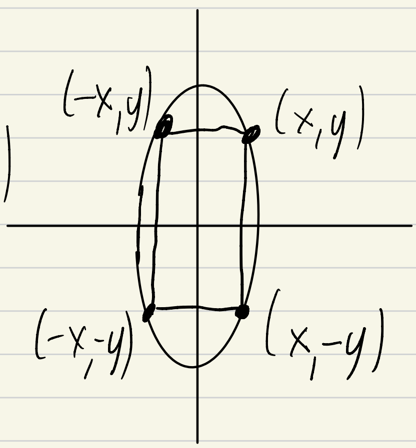
(1c) $\begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 3 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = -2 \\ 3 - \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1. \end{cases}$

Wir beobachten außerdem, dass

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da die 2 Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal sind ist $\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$. Also ist $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix aus Eigenvektoren von A, deshalb

$S^T A S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Also $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(2a) (i)



Die Eckpunkte des Rechtecks müssen aus Symmetriegründen am Rand der Ellipse sein. Sonst wären wir in der Lage das Rechteck zu erweitern um ein Rechteck mit größerem Flächeninhalt zu bekommen. Wenn (x,y) $x,y \geq 0$ ein Eckpunkt ist dann sind $(x,-y), (-x,y), (-x,-y)$ die anderen Eckpunkte. Da (x,y) am Rand der Ellipse ist gilt $h(x,y) = 0$ (Nebenbedingung) wobei $h(x,y) = 2x^2 + \frac{y^2}{2} - 4$. Die Seiten des Rechtecks sind $2x, 2y$ also der Flächeninhalt zu maximieren ist $f(x,y) = (2x)(2y) = 4xy$.

(ii) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y \\ 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$ und $y = 0$. Aber $h(0,0) \neq 0 \Rightarrow$ Lagrange verwendbar.

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4y \\ 4x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = \lambda 4x \\ 4x = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4y = \lambda(\lambda y) \\ 4x = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda^2 - 4)y = 0 \\ 4x = \lambda y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ oder } \begin{cases} \lambda = \pm 2 \\ y = \pm 2x. \end{cases}$$

Da aber $h(0,0) = -4$ erfüllt $(0,0)$ die Nebenbedingung nicht. Also $\begin{cases} \lambda = \pm 2 \\ y = \pm 2x \end{cases} \xRightarrow{\text{da } x,y > 0} y = 2x$.

Aber $h(x,y) = 0 \xLeftrightarrow{y = 2x} h(x, 2x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 1 \xLeftrightarrow{\text{da } x > 0} x = 1$.

Also $(x,y) = (1,2)$ somit ist $f(1,2) = 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$ der größtmögliche Flächeninhalt

(2b) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sin t}{2} \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Parametrisierung des Randes

$$\text{Fluss} = \int_\gamma \vec{w} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{äußerer Normaleneinheitsvektor}} \, ds = \int_0^{2\pi} \vec{w}(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}}_{\vec{n}} \underbrace{\|\gamma'(t)\| dt}_{ds}$$

$$= \int_0^{2\pi} \vec{w}(\gamma(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sin t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{2} \\ \sin t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dt = \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

(2c) f differenzierbar und $f_x(x,y)=0 \iff 2x=0 \iff x=0$

$f_y(0,0)=0 \iff -4y^3=0 \iff y=0.$

Also ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von f. und $f(0,0)=0$

Da $f(\varepsilon,0)=\varepsilon^2 > f(0,0) \quad \forall \varepsilon \neq 0$

$f(0,\varepsilon) = -\varepsilon^4 < f(0,0) \quad \forall \varepsilon \neq 0$

Hat f kein lokales Extremum in $(0,0)$ und somit kein lokales Extremum überhaupt.

(3a) Auf S ist $\frac{\nabla(x^2+y^2+z^2)}{\|\nabla(x^2+y^2+z^2)\|} = \frac{(2x,2y,2z)}{\underbrace{\|(2x,2y,2z)\|}_{2 \text{ da } (x,y,z)\in S}} = (x,y,z)$ der

äußere Normaleneinheitsvektor. Also $v(\vec{r}) = \vec{r} = \vec{n}$

$\Rightarrow \quad v(\vec{r}) \cdot \vec{n} = 1 \quad$ Also

$$\iint_S v(\vec{r}) \cdot \vec{n}\, do = \iint_S 1\, do = F(S) \quad \text{(Flächeninhalt von } S\text{)}$$

Also $F(S) = \iint_S v(\vec{r})\vec{n}\, do \underset{\text{Divergenzsatz}}{=} \iiint_B \operatorname{div} v(\vec{x})\, d(x,y,z)$

Aber $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ $\Bigg\} \Rightarrow$

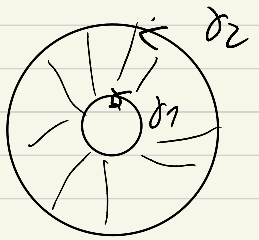
$$F(S) = 3 \iiint_B d(x,y,z) = 3\, V(B) \quad \text{(Volumen von } B\text{)} \quad \text{q.e.d.}$$

(3b) $\left(\nabla f(\vec{x})\right)\cdot\vec{x} \xrightarrow[\text{renzierbar}]{f \text{ diffe-}} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}+t\vec{x}) - f(\vec{x})}{t}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\alpha} f(\vec{x}) - f(\vec{x})}{t} = f(\vec{x}) \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}$$

$$= f(\vec{x})\ (t^{\alpha})'\Big|_{t=1} = f(\vec{x})\ \alpha t^{\alpha-1}\Big|_{t=1} = \alpha f(\vec{x}).$$

(3c)



Da γ_1, γ_2 positiv orientiert sind
Nach der Variante des Satzes von Gauß-Green gilt

$$\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\underbrace{1\le x^2+y^2\le 3^2}_{\text{Menge zwische der Kurven } \gamma_1, \gamma_2.}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) d(x,y)$$

$$\xrightarrow[\text{Annahme}]{\text{nach}} - \iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 3} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, d(x,y) \xrightarrow[\text{koordinaten}]{\text{Polar-}} -\int_1^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3}\, r\, d\theta\, dr$$

$$= -2\pi \int_1^3 \frac{1}{r^2}\, dr = 2\pi \frac{1}{r}\Big|_1^3 = \frac{2\pi}{3} - 2\pi.$$

Also $\displaystyle\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s}}_{=2\pi \text{ nach Annahme}} - 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$

4a) $0 \le z \le e - e^x$ und $x \ge 0 \iff x \in [0,1]$ $z \in [0, e-e^x]$.
Da $e - e^x \ge 0 \iff e^1 \ge e^x \xrightarrow[\text{ton wachend}]{e^x \text{ streng mono-}} x \le 1.$

Also ist $\vec{f}(x,z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x^3}{3} - \frac{z^2}{2} \\ z \end{pmatrix}$, $x \in [0,1]$, $z \in [0, e-e^x]$

eine Parametrisierung der Fläche. Aber

$\vec{f}_x(x,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_z(x,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ 1 \end{pmatrix}$. Also

$$\vec{f}_x \times \vec{f}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & x^2 & 0 \\ 0 & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -1 \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{f}_x \times \vec{f}_z\| = \sqrt{x^4+1+z^2}.$$

Also $$\iint_F \frac{1}{\sqrt{1+z^2+x^4}}\, do = \int_0^1 \int_0^{e-e^x} \frac{1}{\sqrt{1+z^2+x^4}} \sqrt{x^4+1+z^2}\, dz\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{e-e^x} 1\, dz\, dx = \int_0^1 (e-e^x)\, dx = e - \int_0^1 e^x\, dx$$

$$= e - [e^x]_0^1 = e-(e-1) = 1.$$

4b). (i) $\sqrt{3(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$

über den Kegel $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ — unter der Halbkugel $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$.

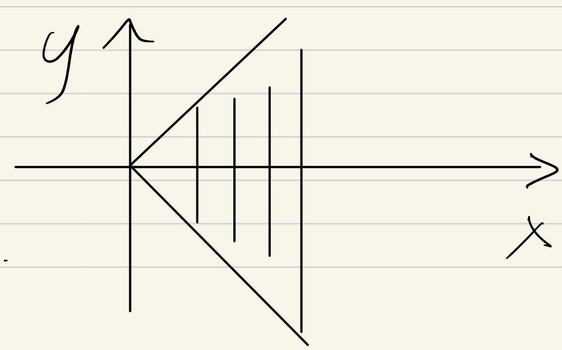
Der Kegel und die Kugel schneiden sich

wenn $\sqrt{3(x^2+y^2)} = \sqrt{4-x^2-y^2} \iff 3(x^2+y^2) = 4-(x^2+y^2)$

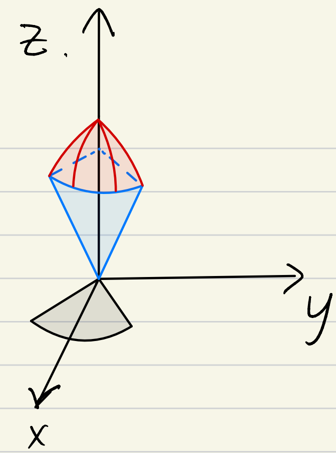
$\iff 4(x^2+y^2) = 4 \iff x^2+y^2 = 1.$

In $\mathbb{R}^2$ $|y| \leq x$ $\rightsquigarrow$

(rechts von $x=|y|$).



Zusammengefasst bekommen wir die Skizze rechts.



(b) Da $0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$ bekommen wir

$$x^2+y^2+z^2 \le x^2+y^2+4-x^2-y^2 = 4 \Rightarrow r \le 2.$$

$$z \ge \sqrt{3(x^2+y^2)} \overset{\text{für}}{\underset{z\ge 0}{\Rightarrow}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \le \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\overset{\theta \ge 0}{\Longrightarrow} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}.$$

$|y| \le x \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. (zwischen den zwei Winkelhalbierenden).

Also $\iiint_B z \, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta \, r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$

$$= \underbrace{\int_0^2 r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi.}_{\text{da Grenzen feste Zahlen und Integrand Produkt Funktion.}}$$

$$= \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2\theta \, d\theta = -\pi \frac{\cos 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$