Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Sommer 2017
18.07.2017

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (6 + 4 Punkte)

a) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Bestimmen Sie eine Orthogonale Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist, und geben Sie $S^{-1}AS$ an.

b) Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy - y^2$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion und ihre Art (lokales Minimum, lokales Maximum oder Sattelpunkt).

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

a) Mit Hilfe der Multiplikationsregel von Lagrange bestimmen Sie den größten Flächeninhalt eines Rechtecks, das in der Menge $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leqslant 4\}$ liegt und Seiten parallel zu den x,y-Achsen hat.

b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$. Zeigen Sie, dass g stetig in $(0,0)$ ist aber nicht differenzierbar in $(0,0)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(3 + 3 + 4 Punkte)**

a) Sei $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ mit $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x+y \\ 2y+x \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\vec{w}$ ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Sei $T(t,x) = -t^3x^3+6x^2t^2+10xt+10$ die Temperatur T als Funktion der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und des Ortes $x \in \mathbb{R}$. Wenn $t = 1$, ist ein Käfer in $x = 1$ ganz glücklich mit der Temperatur von 25 Grad ($T(1,1) = 25$) und er möchte die Temperatur beibehalten. Hat der Käfer die Möglichkeit für t nah bei 1 die Temperatur zu beibehalten? Wann ja, mit welcher Geschwindigkeit soll er anfangen sich zu bewegen?

c) Wir betrachten das Integral

$$\int_1^e \int_{\ln(y)}^1 e^{e^x - x} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich, vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie damit den Wert des Integrals.

Aufgabe 4 **(4 + 6 Punkte)**

a) Sei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2y+5, x^2+y^2 \leqslant 4\}$ und wir betrachten das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^3 e^{yz^3} \\ 0 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds durch D, das heißt das Integral $\iint_D \vec{w} \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}o$, wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der nach oben zeigt.

b) Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{v} : \{(x,y,z) \in R^3 : z > -1\} \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+(1+z)^y \\ -y \\ z+e^{e^x} \end{pmatrix}$. Die Oberfläche von

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 2, \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant \sqrt{3(x^2+y^2)}\}$$

wird mit ∂B bezeichnet. Berechnen Sie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Ausfluss von $\vec{v}$ durch ∂B, das heißt das Integral $\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}o$, wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Bereichs zeigt.