

Lösungshinweise

$$1a) A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 0} \text{ oder } \boxed{\lambda = 5} \quad (A - 0I) \vec{v} = \vec{0} \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \quad (\Rightarrow) \quad \vec{v} \in \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(A - 5I) \vec{w} = \vec{0} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{w} = \vec{0} \quad (\Rightarrow) \quad \vec{w} \in \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Also } E_A(0) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_A(5) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da A symmetrisch ist sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.

Insbesondere sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ orthogonal. Da es keine andere linear unabhängige Eigenvektoren gibt reicht es mit der Länge der Vektoren zu dividieren, damit

S orthogonal ist. Das gibt

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Also}$$

$$S = (\vec{v}_1 | \vec{w}_1) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \quad \text{Es gilt dann}$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(1b) \begin{cases} f_x = x^2 + 2y \\ f_y = 2x - 2y \end{cases} \quad \text{Also } \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ oder } x=-2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (0,0) \text{ oder } \\ (x,y) = (-2,-2) \end{cases}$$

Da $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ bekommen

mit $H_f(0,0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_B, \quad H_f(-2,-2) = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_C$

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+2) - 4 = 0$$

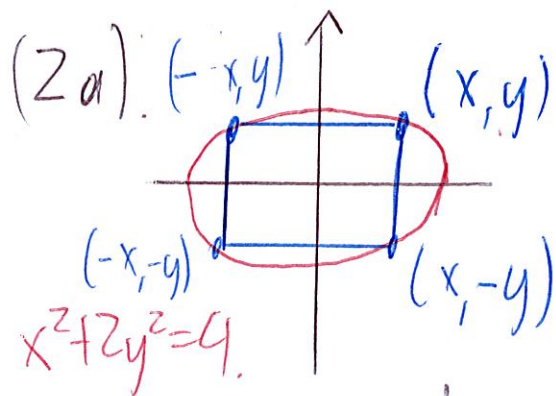
$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 16}}{2}$ also B hat einen positiven und 2 einen negativen Eigenwert also ist indefinit $\rightarrow (0,0)$ Sattelpunkt

$$\det(C - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+4)(\lambda+2) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0 \quad \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 16}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2}$$

Da $\sqrt{20} < 6$ sind beide Eigenwerte negativ

$\Rightarrow (-2,-2)$ lokales ~~Minimum~~ Maximum



Wegen Symmetrie der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 4$ bez. der x, y Achsen hat das Rechteck mit dem größten möglichen Flächeninhalt. Scheitel auf $x^2 + 2y^2 = 4$. Ist (x, y) der Scheitel mit positiven Koordinaten, so hat das Rechteck Seiten $y - (-y) = 2y$ und $x - (-x) = 2x$ also Flächeninhalt $f(x, y) = 4xy$. Also zu bestimmen ist Max von f mit Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ wobei $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4$. Die Multiplikationsregel von Lagrange gibt

$$f(x, y) = \lambda g(x, y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4y \\ 4x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \lambda^2 y \\ x = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\lambda^2 - 2) = 0 \\ x = \lambda y \end{cases}$$

Ist $y = 0$ dann $x = \lambda y = 0$ ausgeschlossen da $0^2 + 2 \cdot 0^2 \neq 4$. Also $y \neq 0$ deshalb.

$$\begin{cases} \lambda^2 - 2 = 0 \\ x = \lambda y \end{cases} \text{ also } x = \pm \sqrt{2} y. \text{ Aber } \begin{cases} x = \pm \sqrt{2} y \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{2}y \\ 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{2}y \\ y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1, \sqrt{2}) \text{ oder } (-1, \sqrt{2}) \text{ oder } (1, -\sqrt{2}) \text{ oder } (-1, -\sqrt{2})$$

Deshalb ist der größte mögliche Flächeninhalt $f(1, \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$. (Da wir angenommen haben, dass $x > 0, y > 0$ müssen wir die anderen Kandidaten nicht berücksichtigen.)

$$(b) |g(x,y) - 0| = \frac{|2x^3|}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} 2|x| \leq 2|x| \rightarrow 0$$

wenn $(x,y) \rightarrow (0,0)$

≤ 1 da $x^2 \leq x^2+y^2$

Also $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$, also ist g stetig in $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{x^2} - 0}{x} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0$$

Wenn f in $(0,0)$ differenzierbar wäre dann $f'(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (2, 0)$ und deshalb

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - (2, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|}{\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|} = \frac{\frac{2x^3}{x^2+y^2} - 2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$$

$$= -\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ wenn } (x,y) \neq (0,0) \text{ was nicht}$$

gegen 0 geht wenn $(x,y) \rightarrow (0,0)$ weil

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0) \text{ aber } -\frac{2 \left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{2^{\frac{3}{2}}}{n^3}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Somit ist die Funktion nicht differenzierbar in $(0,0)$.

$$(3a) \vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+y \\ 2y+x \end{pmatrix}. \text{ Da } \frac{\partial w_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial w_2}{\partial x}$$

auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend

ist ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld. Ist

$v(x,y)$ ein Potential dann $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = w_1 = 4x+y$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2x^2 + xy + c(y). \text{ Aber dann}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = x + c'(y) \stackrel{!}{=} w_2 = 2y+x. \text{ Dann}$$

gilt $c'(y) = 2y \Rightarrow c(y) = y^2$ ist eine mögliche Wahl. Also ist

$v(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$ ein zugehöriges Potential.

(3b) Sei $f(t, x) = T(t, x) - 25 = -t^3 x^3 + 6x^2 t^2 + 10xt - 15$

Dann f ist C^1 und $f(1, 1) = T(1, 1) - 25 = 0$.

$$f_x(1, 1) = \left(-3x^2 t^3 + 12xt^2 + 10t \right) \Big|_{(x, t) = (1, 1)} = 19 \neq 0.$$

Also nach dem Satz über die implizit definierten Funktionen gibt es für t nah bei 1 eine eindeutige C^1 Funktion $x(t)$ mit $f(t, x(t)) = 0 \Leftrightarrow T(t, x(t)) = 25$. Also hat der Kötter die Möglichkeit die Temperatur zu beibehalten. Die Geschwindigkeit am

Anfang ist $x'(1) = - \frac{f_t(1, 1)}{f_x(1, 1)} = - \frac{T_t(1, 1)}{T_x(1, 1)}$.

Da aber $f_t(1, 1) = \left(3t^2 x^3 + 12t x^2 + 10x \right) \Big|_{(x, t) = (1, 1)} = 19$

bekommen wir $x'(1) = -\frac{19}{19} = -1$. Also

der Kötter muss anfangen mit

Geschwindigkeit -1 sich zu bewegen.

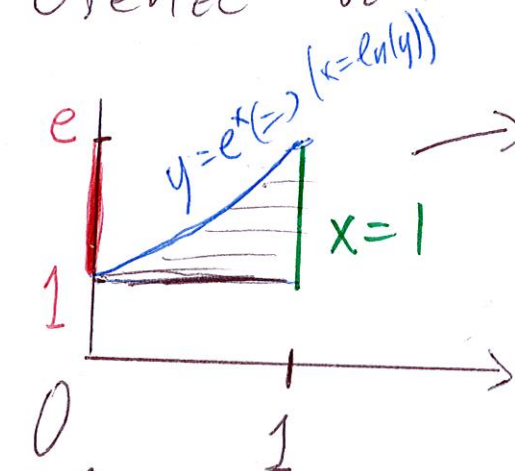
Bemerkung: Die Aufgabe kann zufällig leichter gelöst werden, wenn man merkt, dass $T\left(t, \frac{1}{t}\right) = 25$.

$$3c) I := \int_1^e \int_{\ln(y)}^1 e^{e^x - x} dx dy \text{ ist ein}$$

Integral über den Bereich

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq e, \ln(y) \leq x \leq 1\}.$$

Da $\ln(y) = x \Leftrightarrow y = e^x$ ist die untere Grenze von x auf der Kurve $y = e^x$.



→ grobe Skizze.

Wenn man nun der Bereich auf der

x -Achse projiziert dann ist die Projektion das Intervall $[0, 1]$.

Also den Integrations-

bereich kann man auch schreiben als

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq e^x\}. \text{ Also}$$

$$I = \int_0^1 \int_1^{e^x} e^{e^x - x} dy dx = \int_0^1 e^{e^x - x} \left(\int_1^{e^x} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{e^x - x} (e^x - 1) dx \quad \frac{u = e^x - x}{\frac{du}{dx} = (e^x - 1) dx} \quad \int_{e^0 - 0}^{e^1 - 1} e^u du = e^u \Big|_1^{e-1} = e^{e-1} - e.$$

Bemerkung: Wenn man überprüfen will,
dass $A=B$ wobei $A=\{(x,y): 1 \leq y \leq e, \ln(y) \leq x \leq 1\}$

$B=\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq e^x\}$ ohne die
Skizze, kann man das wie folgt tun:

(i) zeigen $A \subset B$, (ii) zeigen $B \subset A$.

(i) Ist $(x,y) \in A$ dann $1 \leq y \leq e$
und $\ln(y) \leq x \leq 1$. Aber $y \geq 1 \xrightarrow[\text{monoton wachsend}]{\ln}$ $\ln(y) \geq \ln(1) = 0$.

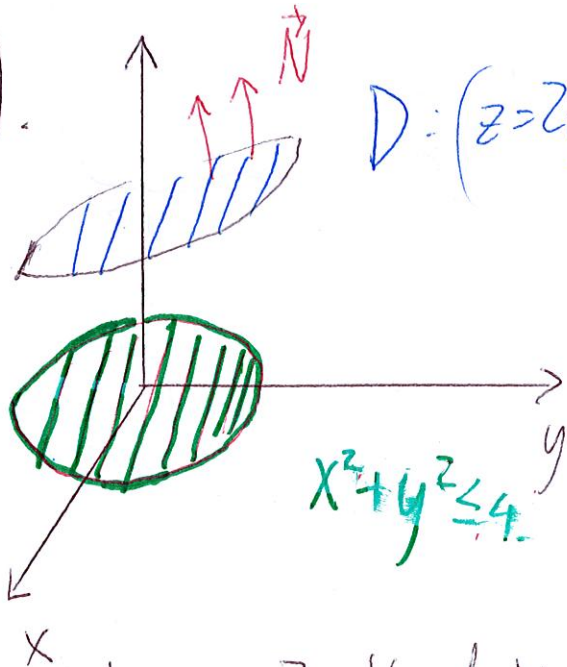
Also $0 \leq x \leq 1$. (1) Da $1 \leq y \leq e$ und
 $\ln(y) \leq x \xrightarrow[\text{wachsend}]{e^x \text{ monoton}}$ $y \leq e^x$ bekommen wir
 $1 \leq y \leq e^x$. (2). (1), (2) $\Rightarrow (x,y) \in B$. Also $A \subset B$.

(ii) Ist $(x,y) \in B$. Dann $1 \leq y \leq e^x$ und
 $x \leq 1 \xrightarrow[\text{wachsend}]{e^x \text{ monoton}}$ $1 \leq y \leq e^1 = e$. (3)

Da $0 \leq x \leq 1$ und $y \leq e^x \xrightarrow[\text{wachsend}]{\ln \text{ monoton}}$ $\ln(y) \leq x$
folgt $\ln(y) \leq x \leq 1$. (4). (3), (4) $\Rightarrow (x,y) \in A$.

Also $B \subset A$.

(4a). $D: (z=2y+5) \wedge x^2+y^2 \leq 4$



Die Fläche D ist
Durchschnitt der
Ebene $z = 2y + 5$ mit

dem Zylinder $x^2 + y^2 \leq 4$. Die Fläche
kann man auch schreiben also

$$\left\{ \vec{g}(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y+5 \end{pmatrix} \text{ mit } x^2+y^2 \leq 4 \right\}. \text{ Da}$$

$$\vec{g}_x \times \vec{g}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ nach oben zeigt}$$

ist $\vec{N} = \frac{\vec{g}_x \times \vec{g}_y}{\|\vec{g}_x \times \vec{g}_y\|}$ der gesuchte Normalen-
einheitsvektor. Also

$$\text{Ferner } \vec{w}(\vec{g}(x,y)) = \vec{w}(x,y,2y+5) = \begin{pmatrix} (2y+5)^2 e^{y(2y+5)} \\ 0 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Somit ist } \vec{w}(\vec{g}(x,y)) \cdot (\vec{g}_x \times \vec{g}_y) = x^2 + y^2. \quad (1)$$

$$\text{Also } \iint_D \vec{w} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \vec{w}(\vec{g}(x,y)) \cdot \underbrace{\frac{\vec{g}_x \times \vec{g}_y}{\|\vec{g}_x \times \vec{g}_y\|}}_{\vec{N}} \underbrace{\|\vec{g}_x \times \vec{g}_y\|}_{d\sigma} d(x,y)$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \vec{w}(q(x,y)) (\vec{g}_x \times \vec{g}_y) d(x,y) \stackrel{(1)}{=} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} d(x,y)$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \overset{x^2+y^2}{r^2} \underbrace{r}_{\text{Determinante der Jacobi Matrix}} dr d\theta = 2\pi \int_0^2 r^3 dr = 8\pi.$$

Polarkoordinaten.

$$\text{Da } \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\} = \{(r,\varphi) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Bemerkung: DD auf der Probeklausur war ein Druckfehler.

4b) Wurde während der Übung 13

bearbeitet. Eine alternative Erklärung für die Grenzen des Winkels θ ist die folgend

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{3(x^2+y^2)} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sqrt{x^2+y^2}=r \sin \theta} \\ z = r \cos \theta \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{r \sin \theta}{\sqrt{3}} \leq r \cos \theta \leq \sqrt{3} r \sin \theta. \quad \text{Was für } r \neq 0$$

$$\text{gibt } \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} \leq \cos \theta \leq \sqrt{3} \sin \theta \Rightarrow \frac{\tan \theta}{\sqrt{3}} \leq 1 \leq \sqrt{3} \tan \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan \theta \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}. \quad \text{Dabei ist } \cos \theta \neq 0 \text{ weil } z \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} > 0 \text{ wenn } r \neq 0.$$