

Eigenwerte λ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 0-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Regel von Sarrus

$$(3-\lambda) \cdot (0-\lambda) \cdot (-1-\lambda) + 0 + 0 - (-1) \cdot 2 \cdot (-1-\lambda) - 0 - 0 = 0$$
$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{AF} = 1)$$

$$\lambda_2 = 2 \quad (\text{AF} = 1)$$

$$\lambda_3 = -1 \quad (\text{AF} = 1)$$

→ Algebraische Vielfachheit von 1 (AF = 1)

→ Bei doppelter NS: AF = 2 / dreifacher NS: AF = 3 ...

→ **Probe:** $\sum \lambda_i = \text{Spur} = \text{Summe der Zahlen in Diagonale von A}$

Eigenvektoren

$$E_A(\lambda_i) = \text{Kern}(A - \lambda_i \cdot I)$$

$$E_A(\lambda_1) = \text{Kern}(A - 1 \cdot I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

→ In Zeilennormalform bringen (**ZNF**) algebraische Umformungen (Zeilen/Spalten addieren)

$$\text{ZNF: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Jede Zeile beginnt mit einer 1 / Über jeder vordersten 1 nur 0er}$$

$$E_A(\lambda_1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ZNF}$$

→ **-1 – Ergänzungstrick**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ in Zeile, in der der Diagonale eine 1 fehlt eine -1 einfügen Rest der Zeile 0er}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ muss auch „dazwischengeschoben“ werden}$$

$$E_A(1) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad | \text{ in linearen Aufspann alle Spalten mit -1- ergänzt schreiben } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E_A(2) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_A(-1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

➔ Geometrische Vielfachheit: Dimension des Kerns = Anzahl der ergänzten -1

- GF = 1 bei allen λ

➔ Ist GF = AF bei jedem Eigenwert ➔ Matrix **diagonalisierbar**

Es gilt: $S^{-1}AS = D$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte in die Spalte mit den zugehörigen Eigenvektoren, ist die Vielfachheit 2 oder höher einfach mehrere λ_i hineinschreiben, Eigenwert mehrmals benutzen

$$E_A(3) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Differentialgleichungssysteme über Eigenwerte lösen

$$x' = 2x - 3y$$

$$y' = 3y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad E_A(2) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = 3 \quad E_A(3) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich die Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum E_A(\lambda_i) C_i e^{\lambda_i t} \quad C_i : \text{beliebige Konstante}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 e^{2t} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} C_2 e^{3t}$$

$$x(t) = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{3t}$$

$$y(t) = C_2 e^{3t}$$