Wiederholung Eigenwerte λ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 0-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \mathbf{= 0}$$

Regel von Sarrus

$$(3-\lambda)\cdot(0-\lambda)\cdot(-1-\lambda)+0+0-(-1)\cdot 2\cdot(-1-\lambda)-0-0 \mathbf{= 0}$$
$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \mathbf{= 0}$$
$\lambda_1 = 1 \qquad (\mathrm{AF} = 1)$
$\lambda_2 = 2 \qquad (\mathrm{AF} = 1)$
$\lambda_3 = -1 \qquad (\mathrm{AF} = 1)$

➔ Algebraische Vielfachheit von 1 (AF = 1)
➔ Bei doppelter NS: AF = 2 / dreifacher NS: AF = 3 …
➔ **Probe:** $\sum \lambda_i = Spur$ = Summe der Zahlen in Diagonale von A

Eigenvektoren

$$E_A(\lambda_i) = Kern(A - \lambda_i \cdot I)$$

$$E_A(\lambda_1) = Kern(A - 1\cdot I) = Kern\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

➔ In Zeilennormalform bringen (**ZNF**) algebraische Umformungen (Zeilen/Spalten addieren)

ZNF: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Jede Zeile beginnt mit einer 1 / Über jeder vordersten 1 nur 0er

$$E_A(\lambda_1) = Kern\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = Kern\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Kern\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{ZNF}}{=} Kern\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

➔ <u>**-1 – Ergänzungstrick**</u>

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ in Zeile, in der der Diagonale eine 1 fehlt eine -1 einfügen Rest der Zeile 0er

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ muss auch „dazwischengeschoben" werden

$E_A(1) = lin\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ |in linearen Aufspann alle Spalten mit -1- ergänzt schreiben $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 & \boxed{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{-1}} \end{pmatrix}$

$$E_A(2) = Kern\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = Kern\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = lin\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_A(-1) = Kern\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = Kern\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = lin\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

- ➔ Geometrische Vielfachheit: Dimension des Kerns = Anzahl der ergänzten -1
- GF = 1 bei allen λ
- ➔ Ist GF = AF bei jedem Eigenwert → Matrix **diagonalisierbar**

Es gilt: $\boldsymbol{S^{-1} A\, S = D}$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte in die Spalte mit den zugehörigen Eigenvektoren, ist die Vielfachheit 2 oder höher einfach mehrere λ_i hineinschreiben, Eigenwert mehrmals benutzen

$$E_A(3) = lin\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizen multiplizieren

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = B$$

$S \cdot S^{-1} \cdot A \cdot S = S \cdot B$ || links mit S multiplizieren

$A = S \cdot S^{-1} \cdot A \cdot S \cdot S^{-1} = S \cdot B \cdot S^{-1}$ || rechts mit S^{-1} multiplizieren

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Definitheit

A ist **positiv definit** genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

A ist **negativ definit** genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.

A ist **positiv semidefinit** genau dann, wenn $\lambda \geq 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

A ist **negativ semidefinit** genau dann, wenn $\lambda \leq 0$ für alle Eigenwerte von A gilt.

A ist **indefinit** genau dann, wenn A sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat.

<u>Symmetrische Matrix:</u>

Hurwitz: positiv definit genau dann, wenn alle Hauptunterdeterminanten positiv sind (Aufgabe 6 für alle n gültig)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$