# Partielle Ableitungen

- Ist die Funktion f(x,y,z) von x, y und z abhängig, kann man sie nach diesen Variablen ableiten und die anderen als Konstante denken
- Ein tiefgestelltes x, y, z steht dafür, nach was abgeleitet wurde. Bei $f_{xx}$ wurde zweimal nach x abgeleitet.

$$f(x,y,z) = x^2 \sin(y)\, z$$

$$f(x,y,z)_x = 2\, x \sin(y)\, z$$

$$f(x,y,z)_y = x^2 \cos(y)\, z$$

$$f(x,y,z)_z = x^2 \sin(y)$$

$$f(x,y,z)' = (f_x \quad f_y \quad f_z)$$

- Bildet die Funktion auf $\mathbb{R}^2$ **bekommt die Ableitungsmatrix eine 2. Zeile**

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 & \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 & \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = f\big(g(x)\big)$$

$$(f \circ g)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

**Wichtig: Zuerst f ableiten und dann g(x) einsetzen!**

- Beim g(x,y) einsetzen, wenn f 2-dimensional ist: für die erste Variable x, wird die erste Zeile von g(x,y) eingesetzt

Aufgabe 5

- Über Klausurniveau!

$$\frac{v_r}{r} = \frac{1}{r} cos\phi\, u_x + \frac{1}{r} sin\phi\, u_y$$

$$v_{rr} = \cos^2\phi\ u_{xx} + 2\, sin\phi\, cos\phi\, u_{xy} + \sin^2\phi\ u_{yy}$$

$$v_{\phi\phi} = -r\, cos\phi\, u_x - r\, sin\phi\, u_y + \mathrm{r}^2 \sin^2\phi\ u_{xx} - 2\, r^2\, sin\phi\, cos\phi\, u_{xy} + \mathrm{r}^2 \cos^2\phi\ u_{yy}$$

$$\frac{v_{\phi\phi}}{r^2} = -\frac{1}{r} cos\phi\, u_x - \frac{1}{r} sin\phi\, u_y + \sin^2\phi\ u_{xx} - 2\, sin\phi\, cos\phi\, u_{xy} + \cos^2\phi\ u_{yy}$$

$$\frac{v_r}{r} + v_{rr} + \frac{v_{\phi\phi}}{r^2} = (\sin^2\phi + \cos^2\phi)\big(u_{xx} + u_{yy}\big) = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u(x,y)$$

# Umkehrsatz

- **Stetig differenzierbar**
- **g(U)=V → nachweisen**

- g‘(U) ist regulär (Keine Zeile ist Vielfache von den anderen)
  - ➔ $(g^{-1})'(V) = (g'(\underbrace{g^{-1}(V)}_{=U}))^{-1}$ ,da g(U)=V → $g^{-1}$(V)=U

Lokale Invertierbarkeit: Ableitungsmatrix regulär ➔ det≠0

Injektiv: Jedem Funktions-Wert wird höchstens ein X-Wert, Y-Wert zugeordnet