## implizit definierte Funktionen

Gegeben: $f(x, y, z)$, die man nach einer Variablen Auflösen will: für diese führt man eine neue Funktion ein z=g(x,y)

Umgebung: $U = (x_0, y_0, z_0) \to \boldsymbol{f(x_0, y_0, z_0) = 0}$ (Zeigen!)

$g(x, y) = z$

$$g'(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x, y)}(x, y, g(x, y))$$

$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0}$, da sonst Kehrwert nicht möglich

Tipp 3a)

1. nach den beiden Überprüfungen in **FETT,** in die (0,0,-2) eingesetzt werden müssen, die Endlösung mit Variablen schreiben
2. Bei $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))$ und $\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x, y, g(x, y))$, jedes z mit g(x,y) ersetzen

<u>Auflösen nach mehreren Variablen</u>

$U = (x_0, y_0, u_0, v_0) \to \boldsymbol{f(x_0, y_0, u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ (Zeigen!)

$g(x, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$g'(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial(u, v)}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x, y)}(x, y, g(x, y))$$

$$f'(x, y, u, v) = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{array}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)} \quad \Big| \quad \frac{\partial f}{\partial(u, v)}$$

$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x_0, y_0, u_0, v_0)}$→ **regulär** (Inverse möglich)

Tipp 3b)

1. Dieses Mal mit Variablen: $g(x, y) = (u \quad v) = (1 \quad 1)$
2. $g'(0,0) = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$

## Taylor-Satz

$T_{l,x^0}(\vec{h}) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{l} \frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^k f(x^0)}{k!}$

$$T_{2,x^0}(\vec{h}) = f(x^0) + (\vec{h} \cdot \nabla) f(x^0) + \frac{1}{2!}(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(x^0)$$
$$= f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}^T \cdot H_f(x^0) \cdot \vec{h}$$

**Skalarprodukt** **Matrixprodukt**

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - x^0$$

Tipp 4

1. Zuerst alle gesuchten Ableitungen bilden und für den $\vec{h}$ Vektor $h_1, h_2, h_3$einsetzen
2. Für $h_1, h_2, h_3$ die Werte von $x^0$ einsetzen: z.B. $h_1 = x - 1$

# Umkehrsatz

Lokale Invertierbarkeit: Ableitungsmatrix regulär ➔ det≠0