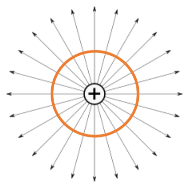
Divergenz und Rotation

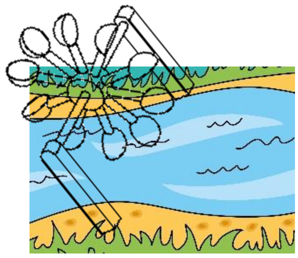
Divergenz: $div(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$ (Skalarprodukt)

Rotation: $rot(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$ (Kreuzprodukt)

Divergenz



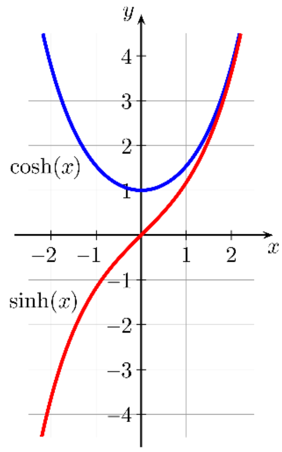
Rotation



Kurvenintegrale 2. Art

$\vec{v}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, Kurve $\gamma: [a, b] \to D$, $\gamma'(t) \neq 0$

$$\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$



Tipp 5a)

- $\sinh(t)' = \cosh(t)$ *und* $\cosh(t)' = \sinh(t)$
- $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$
- $\int \sinh(t)\cosh(t)\ dt = \frac{1}{2}\sinh^2(t)$

$$\boxed{\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}$$

Tipp 5b)

- $\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\, d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\, d\vec{s} = ?$

Aufgabe 6: Ein C^2-Skalarfeld $f: \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ heißt *radialsymmetrisch*, falls $f(\vec{x})$ nur von $\|\vec{x}\|$ abhängt, d.h. falls $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ gilt.

In diesem Falle gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = F(\|\vec{x}\|)$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Zeigen Sie für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$\Delta f(\vec{x}) = F''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|} F'(\|\vec{x}\|)\,.$$