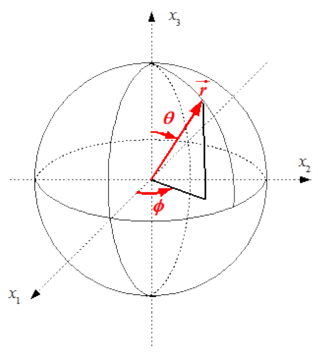
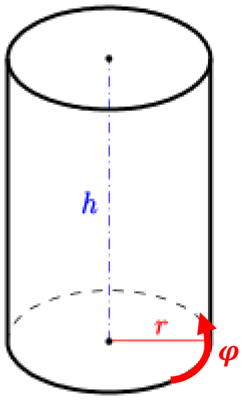
Parametrisieren

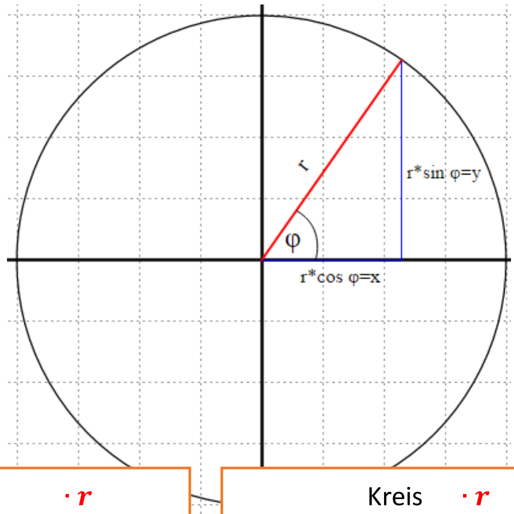
Kugel



Zylinder



Kreis



Kugel $\cdot\, r^2 \sin(\vartheta)$

$$\Phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$r \in [0,r]$$
$$\varphi \in [0,2\pi]$$
$$\vartheta \in [0,\pi]$$

Zylinder $\cdot\, r$

$$\Phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$r \in [0,r]$$
$$\varphi \in [0,2\pi]$$
$$z \in [0,h]$$

Kreis $\cdot\, r$

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$r \in [0,r]$$
$$\varphi \in [0,2\pi]$$

Erinnerung: $\int_M f(x,y,z)\, dzdydx \;=\; \int_K f\big(\Phi(u,v,w)\big)\;\; |det\,(\Phi'\,(u,v,w))|\; dwdvdu$

Beim Umrechnen in andere Koordinaten, muss man mit dem ***ROTEM TERM*** *multiplizieren im Integral*

Für x, y, z die entsprechenden $\Phi -$ *Terme einsetzen*

!! Gilt für Volumenberechnungen, für Oberflächen Integral mit $do = \|\partial_1 g(u,v) \times \partial_2 g(u,v)\|$ benutzen !!

Integrale

Mehrfachintegral

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} (xy+x^2)d(x,y) = \int_0^1\int_0^1 (xy+x^2)dxdy$$

Kurvenintegral 1. Art

$$\int_\gamma f\, d\vec{s} = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt$$

Kurvenintegral 2. Art

$$\int_\gamma \vec{v}\, d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Gauß $\mathbb{R}^2$

$$\oint_{dG} \vec{v}\, d\vec{s} = \iint_G (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) d(x,y)$$

Divergenz Satz Gauß $\mathbb{R}^3$: Fluss

$$\iint_F \vec{F} do = \iiint_V \nabla \cdot \vec{v}\, d(x,y,z)$$

Oberflächenintegral: Fluss

$$\iint_F \vec{v}\, \vec{N} do = \iint_F v(r(u,v)) \cdot \vec{N}(r(u,v)) d(u,v)$$

$$\vec{N} = \partial_1 r \times \partial_2 r$$

Divergenz Satz in $\mathbb{R}^2$

$$\iint_{\partial G} \vec{w}\, \vec{N} ds = \iint_G div(\vec{w})\, d(u,v)$$

Oberflächenintegral

$$\iint_F do = \iint_B \|\partial_1 g(u,v) \times \partial_2 g(u,v)\|\, d(u,v)$$

Stoke

$$\oint_{dF} \vec{v}\, d\vec{s} = \iint_F (\nabla \times \vec{v}) d\vec{o}$$

$$d\vec{o} = \partial_x g(x,y) \times \partial_y g(x,y)$$

Aufgabe 4

Aufgabe 4: Für das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ gilt nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}\, do\,.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0,0,1)$, falls $\mathcal{F}$ der durch $0 \le z \le 1$ beschränkte Teil des Kegelmantels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$ ist.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\, dr = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1)$.

Parametrisierung Kegelmantel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} = g(r,\varphi) \qquad r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]$$

Oberflächenintegral

$$\iint_F do = \iint_B \|\partial_1 g(u,v) \times \partial_2 g(u,v)\|\, d(u,v)$$

$$U(\vec{a}) = \rho \iint_F \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} do = \rho \iint_B \frac{1}{\|\vec{g}(r,\varphi)-\vec{a}\|} \left\|\partial_r g(r,\varphi) \times \partial_\varphi g(r,\varphi)\right\| dr\, d\varphi = ?$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \left\{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Oberflächenintegral

$$\iint_F do = \iint_B \|\partial_x g(x,y) \times \partial_y g(x,y)\|\, d(u,v)$$

Kreis $\cdot r$

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$r \in [0,r]$$
$$\varphi \in [0,2\pi]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: Es sei $\partial\mathcal{F}$ der positiv orientierte Rand der Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{(x, y, y^2 - x^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 3\right\}.$$

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

Kreis $\cdot r$

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$r \in [0,r]$$
$$\varphi \in [0,2\pi]$$

Stoke

$$\oint_{dF} \vec{v}\, d\vec{s} = \iint_F (\nabla \times \vec{v}) d\vec{o}$$

$$d\vec{o} = \partial_x g(x,y) \times \partial_y g(x,y)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

$$rot(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$$

Achtung: Wenn man zuerst das $g(x,y)$ mit Polarkoordinaten parametrisiert und dann $d\vec{o}$ bildet, entfällt der rote Faktor *r, parametrisiert man es jedoch nach dem bilden des Kreuzproduktes von $d\vec{o}$ muss man dieses mit dem Faktor noch multiplizieren.