Tutorium 1

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$A+B, \quad A+C, \quad BA, \quad CB, \quad (A+B)C.$$

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie alle Matrizen $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

a) Gegeben seien

$$\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}.$$

Ergänzen Sie einen dritten Vektor so, dass die Vektoren die Spalten einer unitären Matrix bilden.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix.

i) Rechnen Sie nach, dass $\langle Az, Az\rangle = \langle z, z\rangle$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt.

ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass es einen Vektor $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Az = \lambda z$. Zeigen Sie, dass dann $|\lambda| = 1$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Definition einer unitären Matrix.

Zusammenfassung

- Matrizen:
  - Eigenschaften
  - Rechenregeln
- Vektoren:
  - Eigenschaften
  - Skalarprodukt

Matrizen

- Sei A eine Matrix, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

  n ist die Anzahl Zeilen
  m ist die Anzahl Spalten

z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix};A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Matrizen

- Matrizen können in die Zeilenstufen- und in die Zeilennormalform umgewandelt werden.

z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix};$$ Zeilenstufenform

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$ Zeilennormalform

Wo ist der Unterschied?

1. Bei Zeilennormalform ist das erste Element einer Zeile ungleich 0, eine 1.
2. Bei Zeilennormalform muss in allen Zeilen über dieser ersten 1 eine 0 stehen.

Matrizen

- Rechenregeln:

  Seien A und B Matrizen, wobei $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1.

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{1,1} \pm b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \pm b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} \pm b_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \pm b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Wichtiger Tipp:

$A \cdot B \neq B \cdot A$

2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + \cdots + a_{1,n}b_{n,1} & \cdots & a_{1,1}b_{1,n} + \cdots + a_{1,n}b_{n,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}b_{1,1} + \cdots + a_{n,n}b_{n,1} & \cdots & a_{n,1}b_{1,n} + \cdots + a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Matrizen

- Die transponierte Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}; A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$\downarrow$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A^T \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Matrizen

- Die transponierte Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}; A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$\downarrow$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A^T \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

- Die inverse Matrix existiert nur für quadratische Matrizen; $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$B^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt: $B \cdot B^{-1} = I$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Matrizen

- Die unitäre Matrix L:

  Es muss für L folgendes gelten:

$$(L^*)^T = L^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$(L^*)^T \cdot L = I$$

Vektoren

- Bisher:

  Skalare Größen: $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Neu:

  Vektorielle Größen: $v_1 \in \mathbb{R}^n$, n ist die Dimension des Vektors

Oft findet man auch die Schreibweise: $\overrightarrow{v_1} \in \mathbb{R}^n$

Ein Vektor hat immer eine Richtung und ein Betrag
Ausnahme ist der Nullvektor: $\vec{o}$

Vektoren

- Linearer Aufspann:

$$lin(v_1, v_2) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2; \qquad \text{wobei } a, b \in \mathbb{R}$$

Bsp.:

Zwei lin. unabhängige Vektoren v_1, v_2 bilden mit Hilfe von $lin(v_1, v_2)$ eine Ebene.

$$lin(v_1, v_2) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2;$$

(Linearkombination)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad lin(v_1, v_2) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$$

Vektoren

- Skalarprodukt:

  Das Skalarprodukt kann aus zwei Vektoren beliebiger Dimension gebildet werden. Seien x und y Vektoren, wobei $x, y \in \mathbb{C}^n$.

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} = x_1 y_1^* + x_1 y_2^* + \cdots + x_n\, y_n^*$$

Tipp:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Aufgaben

Aufgabe 1

a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$A+B, \quad A+C, \quad BA, \quad CB, \quad (A+B)C.$$

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie alle Matrizen $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgaben

Aufgabe 4

a) Gegeben seien

$$\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}.$$

Ergänzen Sie einen dritten Vektor so, dass die Vektoren die Spalten einer unitären Matrix bilden.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix.

i) Rechnen Sie nach, dass $\langle Az, Az\rangle = \langle z, z\rangle$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$ gilt.

ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass es einen Vektor $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $Az = \lambda z$. Zeigen Sie, dass dann $|\lambda| = 1$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Definition einer unitären Matrix.