



1

Tutorium 2

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

b) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist C regulär?

Aufgabe 3

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

- a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n \times n}$ nach $\mathbb{C}$.
- b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- c) $\det((\det A)B) = (\det A)^n \det B$.

Zusammenfassung

- Determinanten:
 - Eigenschaften
 - Rechenregeln
- Lineare Abbildungen:
 - Definition

Determinanten

- Die Determinante kann nur von quadratischen Matrizen gebildet werden.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dann ist $\det(A) \in \mathbb{C}$.

$$B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 1$$

Grundlagen

► Determinante einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Grundlagen

- Determinante einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Grundlagen

- Determinante einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Grundlagen

- Determinante einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & 3 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{4} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 & \cancel{1} \\ 1 & \cancel{3} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & 4 & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\det(B) = 12 + 4 + 4 - 6 - 4 - 8 = 20 - 18 = 2$$

Es gilt: $\det(B) \neq 0 \longrightarrow$ Es existiert eine inverse Matrix $B^{-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Darüber hinaus nennt man eine solche Matrix B regulär

Determinanten

- Allgemeine Berechnung der Determinanten beliebig großer Matrizen:

Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Determinanten

- Allgemeine Berechnung der Determinanten beliebig großer Matrizen:

Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ & 0^- \\ 0^- & 2^+ & 0^- & 1^+ \\ 2^+ & 5^- & 6^+ & 2^- \\ 1^- & 0^+ & 3^- & 2^+ \end{vmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Lineare Abbildungen

➤ Definition:

- Sei f eine Abbildung, wobei $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m; n, m \in \mathbb{R}$

z.B.:
$$f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x + 2i \\ x \cdot y \\ 2i \cdot y \end{pmatrix} \quad f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

Die Abbildung f ist eine lineare Abbildung, falls beide folgenden Bedingungen erfüllt sind: $\gamma \in \mathbb{R}; \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$

1. $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$
2. $f(\gamma \cdot \vec{a}) = \gamma \cdot f(\vec{a})$

Aufgaben

Aufgabe 1

b) Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist C regulär?

Aufgaben

Aufgabe 3

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

- a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n \times n}$ nach $\mathbb{C}$.
- b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.
- c) $\det((\det A)B) = (\det A)^n \det B$.