1

Tutorium 3

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $x \times y$, $\langle x \times y, x \rangle$, den Winkel, den die Vektoren x und y einschließen, sowie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte?

Aufgabe 6

a) Finden Sie Matrizen mit den folgenden Eigenschaften:

- **i)** $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und A hat nur den Eigenwert 5.
- **ii)** $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und B hat paarweise verschiedene reelle Eigenwerte.
- **iii)** $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda$ ist das charakteristische Polynom von C.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $\lambda^2 + 5$ ein Eigenwert von $A^2 + 5I_n$ ist.

c) Ist die folgende Aussage wahr?
Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

Zusammenfassung

- Vektoren:
  - Kreuzprodukt
  - Winkelberechnung
- Eigenwerte:
  - Berechnung
- Eigenvektoren:
  - Berechnung

Vektoren

- Das Kreuzprodukt ist eine Rechenoperation ausschließlich für Vektoren $v \in \mathbb{C}^3$. Es bildet aus zwei beliebigen, unabhängigen Vektoren einen dritten Vektor, der orthogonal zu beiden steht.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 \text{ sei orthogonal zu } v_1 \text{ und } v_2.$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren

- Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren x und y, wobei $x, y \in \mathbb{R}^m, \mathrm{m} \in \{2{,}3\}$, berechnet sich nach folgender Formel:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Eigenwerte - Eigenvektoren

- Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kann maximal n Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzen. Zu jedem Eigenwert λ_n existiert ein Eigenvektor oder Eigenraum $v_n \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ oder auch oft $E_A(\lambda_n)$ geschrieben.

- Definition:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Eigenwerte - Eigenvektoren

- Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kann maximal n Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzen. Zu jedem Eigenwert λ_n existiert ein Eigenvektor oder Eigenraum $v_n \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ oder auch oft $E_A(\lambda_n)$ geschrieben.

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

Daraus ergibt sich das charakteristische Polynom, welches nach λ z.B. per Polynomdivision aufgelöst werden kann.

z.B.: $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(B - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 3 = 0$

Eigenwerte - Eigenvektoren

- Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kann maximal n Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzen. Zu jedem Eigenwert λ_n existiert ein Eigenvektor oder Eigenraum $v_n \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ oder auch oft $E_A(\lambda_n)$ geschrieben.

Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$$

Berechnung der Eigenräume:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$
$$A \cdot v - \lambda \cdot I_n \cdot v = 0$$
$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$$

Definition des Kern$(A - \lambda \cdot I_n)$

$E_A(\lambda_n) =$ Kern$(A - \lambda_n \cdot I_n)$ ← Berechnen mit Hilfe von ZNF und -1-Ergänzungstrick

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben seien die Vektoren $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $x \times y$, $\langle x \times y, x \rangle$, den Winkel, den die Vektoren x und y einschließen, sowie den Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms.

Aufgaben

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte?

Aufgaben

Aufgabe 6

a) Finden Sie Matrizen mit den folgenden Eigenschaften:

- **i)** $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und A hat nur den Eigenwert 5.
- **ii)** $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und B hat paarweise verschiedene reelle Eigenwerte.
- **iii)** $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda$ ist das charakteristische Polynom von C.

b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $\lambda^2 + 5$ ein Eigenwert von $A^2 + 5I_n$ ist.

c) Ist die folgende Aussage wahr?
Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.