Tutorium 4

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

Altklausuraufgaben

H14:

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie S^{-1} und $S^{-1}AS$ an.

F15:

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie S^{-1} und $S^{-1}AS$ an.

Zusammenfassung

- Diagonalmatrix:
  - Berechnung

Eigenwerte - Eigenvektoren

- Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ kann maximal n Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzen. Zu jedem Eigenwert λ_n existiert ein Eigenvektor oder Eigenraum $v_n \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ oder auch oft $E_A(\lambda_n)$ geschrieben.

- Definition:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Diagonalmatrix

- Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kann maximal n Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzen. Zu jedem Eigenwert λ_n existiert ein Eigenvektor oder Eigenraum $v_n \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ oder auch oft $E_A(\lambda_n)$ geschrieben.

- Entspricht die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte λ_n jeweils der geometrischen Vielfachheit, existiert eine Matrix $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die nur Einträge in Form der Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen besitzt.

Es gilt:

$$D = S^{-1}AS \qquad S \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Tipp:
Die Spalten von S entsprechen einer Orthonormalbasis, gebildet aus den Eigenvektoren der Matrix A.

Warum Orthonormalbasis?

Erleichtert das Invertieren von S: $\quad S^{-1} = S^T$

Aufgaben

H14:

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie S^{-1} und $S^{-1}AS$ an.

Aufgaben

F15:

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie S^{-1} und $S^{-1}AS$ an.