Tutorium 6

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie deren Längen

a) $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \big(t,\ |t|\big)$

b) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \big(t - \sin t,\ 1 - \cos t\big)$

c) $z\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto z(\varphi) := \varphi e^{i\varphi}$

Hinweis zur Berechnung der Längen: **b)** Schreiben Sie $\cos t = \cos(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t)$ und verwenden Sie das Additionstheorem für Cosinus. **c)** Es gilt $\int \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2})$.

Aufgabe 2

Die Kurve $\gamma\colon [-\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}].$$

Ist γ eine reguläre Kurve? Berechnen Sie die Länge der Kurve γ und bestimmen Sie die Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge.

Zusammenfassung

- Kurven im $\mathbb{R}^n$:
  - Länge einer Kurve berechnen

Kurven im $\mathbb{R}^n$

- Es sei eine Kurve gegeben:

$$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n, \mathrm{t} \mapsto \gamma(t)$$

Beispiel:

$$\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \mathrm{t} \mapsto \binom{t}{t^2}$$

$$\gamma(t) = \binom{t}{t^2}$$

Die Länge der Kurve γ in der Ebene $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{L}(\gamma(t)) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Aufgaben

Aufgabe 1

Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie deren Längen

a) $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \big(t,\ |t|\big)$

b) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \big(t - \sin t,\ 1 - \cos t\big)$

c) $z\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto z(\varphi) := \varphi e^{i\varphi}$

Hinweis zur Berechnung der Längen: **b)** Schreiben Sie $\cos t = \cos(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t)$ und verwenden Sie das Additionstheorem für Cosinus. **c)** Es gilt $\int \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Arsinh} \varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2})$.

Zu b:

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

Aufgaben

Aufgabe 2

Die Kurve $\gamma\colon [-\sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, \qquad t \in \left[-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Ist γ eine reguläre Kurve? Berechnen Sie die Länge der Kurve γ und bestimmen Sie die Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge.