Tutorium 7

1

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{xy}$

Berechnen Sie auch die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ von f in Richtung $v := (1,1)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktion.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \left(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\right)$$

H16: **Aufgabe 2**

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{2t^3}{3} \end{pmatrix}, t \in [0, \sqrt{3}].$$

Zusammenfassung

- Kurven im $\mathbb{R}^n$:
  - Länge einer Kurve berechnen
- Partielle Ableitung:
  - Berechnung
- Differenzierbarkeit von Funktionen:
  - Definition
- Richtungsableitung:
  - Definition
  - Berechnung

Kurven im $\mathbb{R}^n$

- Es sei eine Kurve gegeben:

$$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n, \mathrm{t} \mapsto \gamma(t)$$

Beispiel:

$$\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \mathrm{t} \mapsto \binom{t}{t^2}$$

$$\gamma(t) = \binom{t}{t^2}$$

Die Länge der Kurve γ in der Ebene $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{L}(\gamma(t)) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Partielle Ableitung

- Die partielle Ableitung wird oftmals wie folgt notiert:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$$ Partielle Ableitung nach x

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x} = f_{xx}(x,y)$$ Partielle Ableitung nach x 2. Ordnung

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y) = 2\mathrm{x}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = 2\mathrm{y}$$

Die partielle Ableitung nach z.B. x beschreibt die Steigung in einem Punkt (x_0, y_0) für ein konstantes y in x-Richtung.

Tipp (Satz von Schwarz):
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

Differenzierbarkeit

- Wann ist eine Funktion stetig differenzierbar?

19.10. Kriterium für Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$.

Definition: f heißt in D *partiell differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ auf D existieren, und *stetig partiell differenzierbar* in D, falls die partiellen Ableitungen zusätzlich auf D stetig sind.

Satz: Sei f in D partiell differenzierbar und $\vec{x}_0 \in D$. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ stetig in $\vec{x}_0$, so ist f in $\vec{x}_0$ differenzierbar.

Aus dem HM2 Skript SS18 von
Peer Christian Kunstmann

Differenzierbarkeit

Definition: f heißt *differenzierbar* in $\vec{x}_0 \in D$ (gelegentlich *total differenzierbar* in $\vec{x}_0$), falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \to 0 \quad (\vec{x} \to \vec{x}_0)$$

bzw.

$$\frac{\|f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} \to 0 \quad (\vec{h} \to 0).$$

In diesem Fall ist die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt und heißt *Ableitung von f in $\vec{x}_0$*, Bezeichnung: $f'(\vec{x}_0) := A$. Andere Bezeichnungen: $Df(\vec{x}_0)$, $J_f(\vec{x}_0)$, *Jacobimatrix*, *Funktionalmatrix*. Es ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

f heißt *differenzierbar in D*, falls f in **jedem** $\vec{x}_0 \in D$ differenzierbar ist.

Aus dem HM2 Skript SS18 von
Peer Christian Kunstmann

Jacobimatrix

- Wie wird zum Beispiel die Jacobimatrix $Df(x,y)$ gebildet?

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ 2x+1 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

19.7. Richtungsableitungen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

Definition: f heißt in $\vec{x}_0 \in D$ *in Richtung* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ *differenzierbar*, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

in $\mathbb{R}^m$ existiert. $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0)$ heißt *Richtungsableitung von* f *in* $\vec{x}_0$ *in Richtung* $\vec{v}$.

Aus dem HM2 Skript SS18 von Peer Christian Kunstmann

Satz: (a) Ist f differenzierbar in $\vec{x}_0$, so ist f stetig in $\vec{x}_0$.

(b) Ist f differenzierbar in $\vec{x}_0$, so existieren in $\vec{x}_0$ alle Richtungsableitungen von f und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\vec{v} \quad \text{für alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

Aufgaben

H16:

Aufgabe 2

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{2t^3}{3} \end{pmatrix}, t \in [0, \sqrt{3}].$$

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{xy}$

Berechnen Sie auch die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ von f in Richtung $v := (1,1)$.

Alternative Lösung

Wesentlich aufwendiger ist die Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial v}$ mit Hilfe der Definition. Danach gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v = (v_1, v_2) = (1, 1)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x^0+tv) - f(x^0)\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big((x+tv_1)^2 + (y+tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2+y^2+2t(xv_1+yv_2)+t^2(v_1^2+v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((x^2+y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1+yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} \\
&\qquad + t^2(v_1^2+v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big) .
\end{aligned}
$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t+\beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t+\beta t^2}$. Nun gilt

$$
\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(t) - g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2 .
$$

Also erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1+xv_2) + 2(xv_1+yv_2)e^{xy}\cdot 1 + 0 \\
&= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x) + 2(x+y)\big) \\
&= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2) .
\end{aligned}
$$

Aufgaben

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktion.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x,y) = \left(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2 \sin y,\ 4y - x^3\right)$$