Tutorium 8

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

Aufgaben

H14 A2:

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 7z^2 - 3xyz + x^5 + y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0, -2, 1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x, y)$ die Ableitung $g'(x, y)$.

F16 A2:

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y + 6, 1 \leqslant y \leqslant e\}.$$

H16 A2:

c) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Untersuchen Sie g auf Stetigkeit in $(0, 0)$. Untersuchen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$ auf Existenz und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

Zusammenfassung

- Implizit definierte Funktionen:
  - Satz über implizit definierte Funktionen

Satz über implizit definierte Funktionen

- Gegeben sei ein eine Funktion $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit:

$$F(x, y, z) = 0$$

Sei ein Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ gegeben

Wenn: 1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

und

2. $$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$$

gilt, dann ist $F(x, y, z)$ **lokal**
um den Punkt P nach z auflösbar. $\longrightarrow$ $z(x, y) = g(x, y)$

Satz über implizit definierte Funktionen

- Gegeben sei ein eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit:

$$F(x,y,z) = 0$$

Sei ein Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ gegeben

Wenn: 1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
und
2. $\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$

gilt, dann ist $F(x,y,z)$ **lokal** um den Punkt P nach z auflösbar.

$$\downarrow$$

$$z(x,y) = g(x,y)$$

Außerdem gilt dann lokal um P:

$$z'(x,y) = g'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}} \\ -\frac{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \\ -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \end{pmatrix}$$

Aufgaben

H14 A2:

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 7z^2 - 3xyz + x^5 + y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0, -2, 1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x, y)$ die Ableitung $g'(x, y)$.

Aufgaben

F16 A2:

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y + 6, 1 \leqslant y \leqslant e\}.$$

Aufgaben

H16 A2:

c) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$. Untersuchen Sie g auf Stetigkeit in $(0,0)$. Untersuchen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ auf Existenz und berechnen Sie sie gegebenenfalls.