Tutorium 9

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, um den Entwicklungspunkt $x^0 = (0,0)$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

i) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

ii) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + xy^2 - y^2$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange diejenigen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, die vom Punkt $(-1,1)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben. Geben Sie die Abstände an.

Zusammenfassung

- Gradient:
  - Eigenschaften
  - Berechnung
  - Bestimmung lokaler Minima und Maxima
- Taylorpolynome im $\mathbb{R}^2$:
  - Definition
  - Entwicklung
- Multiplikatorenregel von Lagrange:
  - Durchführung

Gradient

- Der Gradient einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beschreibt in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ die Richtung der höchsten Steigung.

$$grad\big(f(x,y)\big) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Bestimmung lokaler Minima und Maxima

- Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gesucht seien lokale Extrema, sowie Sattelpunkte von f.

1. Setzte: $\nabla f(x,y) = 0 \qquad (1)$
2. Finde alle kritischen Punkte $P = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, die die Gleichung (1) erfüllen.
3. Aufstellen der Hessematrix $H_f(x,y)$
4. Alle $H_f(x_i, y_i)$ auf Definitheit prüfen und damit auf die Art der Extremstelle schließen.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\det\left(H_f(x_i,y_i)\right) = \left|H_f(x_i,y_i)\right| = a$$

Fallunterscheidung:

1. $a < 0 \to$ Hessematrix ist indefinit $\longrightarrow$ Sattelpunkt in (x_i, y_i)
2. $a > 0$ und $f_{xx}(x_i, y_i) > 0$ $\to$ Hessematrix ist positiv definit $\longrightarrow$ Lokales Minimum in (x_i, y_i)
3. $a > 0$ und $fxx(x_i, y_i) < 0$ $\to$ Hessematrix ist negativ definit $\longrightarrow$ Lokales Maximum in (x_i, y_i)

Taylorreihen

Bekannt aus HM1:

- Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe die eine beliebige Funktion in einer Umgebung um den Entwicklungspunkt x_0 annähert.

n-te Ableitung von f

N-tes Taylorpolynom

$$T_N(f,x_0)(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Allgemein gilt:

$$f(x) = T_N(f,x_0)(x) + R_N(f,x_0)(x)$$

Restglied

Taylorpolynome

- Neu:

$$T_{n,(\overrightarrow{x_0})}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left((\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) \cdot \vec{\nabla} \right)^k f(\overrightarrow{x_0})$$

Wobei:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} ; \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Taylorpolynom 2. Grades: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$T_{2,(\overrightarrow{x_0})}(x,y) = f(\overrightarrow{x_0}) + (x - x_0) f_x(\overrightarrow{x_0}) + (y - y_0) f_y(\overrightarrow{x_0}) + \frac{1}{2}\left[(x - x_0)^2 f_{xx}(\overrightarrow{x_0}) + (y - y_0)^2 f_{yy}(\overrightarrow{x_0}) + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy}(\overrightarrow{x_0})\right]$$

Aufgaben

Aufgabe 1

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, um den Entwicklungspunkt $x^0 = (0,0)$.

Lösung

b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, gilt

$$
\begin{array}{lll}
f(x,y) & = e^{x-y}\cos x \sin y & \Rightarrow \quad f(0,0) = 0 \\
f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow \quad f_x(0,0) = 0 \\
f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y) & \Rightarrow \quad f_y(0,0) = 1 \\
f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \sin y) & \Rightarrow \quad f_{xx}(0,0) = 0 \\
f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y) & \Rightarrow \quad f_{xy}(0,0) = 1 \\
f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \cos y) & \Rightarrow \quad f_{yy}(0,0) = -2 \\
f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \sin y - 2\sin x \sin y) & \Rightarrow \quad f_{xxx}(0,0) = 0 \\
f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \cos y + 2\sin x \sin y) & \Rightarrow \quad f_{xxy}(0,0) = 0 \\
f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\sin x \cos y - 2\cos x \cos y) & \Rightarrow \quad f_{xyy}(0,0) = -2 \\
f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\cos x \sin y + 2\cos x \cos y) & \Rightarrow \quad f_{yyy}(0,0) = 2
\end{array}
$$

Aufgaben

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

i) $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

ii) $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + xy^2 - y^2$

Aufgaben

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange diejenigen Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, die vom Punkt $(-1, 1)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben. Geben Sie die Abstände an.

Multiplikatorenregel von Lagrange

- Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h(x, y) = 0$ gegeben. Es handelt sich oftmals um Minimierungs- bzw. Maximierungsproblemen (Siehe Aufgabe 3), wobei $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $h(x, y) = 0$ minimiert bzw. maximiert werden soll.

1. Stelle folgende Gleichung auf und löse nach $x(\lambda), y(\lambda)$ auf.

$$\nabla f(x, y) = \lambda \cdot \nabla h(x, y)$$

2. Prüfe ob die Gleichung: $rang\big(Dh(x, y)\big) = 1 \qquad Dh(x, y) = h'(x, y)$

   für alle Punkte (x, y), die $h(x, y) = 0$ erfüllen, gilt.

3. $x(\lambda), y(\lambda)$ in $h(x, y)$ einsetzen und alle Werte für λ ermitteln.

4. Dann auf die kritischen Punkte $P_i = (x_i, y_i)$ schließen und in f einsetzten.