Tutorium 10

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

9. Übungsblatt

Aufgabe 4

Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

a) Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r}$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von u dar.

b) Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)\,.$$

H14:

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 \\ 6xy \end{pmatrix}$$

und die Kurve

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 5+t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon (0,\frac{\pi}{2}) \times (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)\,.$$

Hinweis: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Zusammenfassung

- Kurvenintegral:
  - Berechnung
  - Anwendung
- Kettenregel:
  - Berechnung
- Laplaceoperator:
  - Berechnung

Aufgaben

H14:

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 \\ 6xy \end{pmatrix}$$

und die Kurve

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 5+t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

Kurvenintegral

- Sei $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t)$ eine Kurve wobei $t \in [a, b]$.

$$\int_{\gamma(t)} \vec{v}(x, y) d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Tipp:

$$d\vec{s} = \dot{\gamma}(t)dt$$

$$ds = \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

Kettenregel

- Bereits bekannt aus HM1:

  Kettenregel für: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

- Neu für: $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $g: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$

Zum Beispiel: $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\left(u\big(g(x,y)\big)\right)' = u'\big(g(x,y)\big) \cdot g'(x,y)$$

Tipp:
Bei den Ableitungen handelt es sich jeweils um Matrizen

Laplaceoperator

- Sei $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann wird $\Delta u(x, y)$ wie folgt gebildet:

$$\Delta u(x, y, z, \dots) = \vec{\nabla} \cdot grad\big(u(x, y, z, \dots)\big)$$

$$\text{Mit: } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \vdots \end{pmatrix} ;$$

$$\Delta u(x, y, z, \dots) = \frac{\partial^2 u(x,y,z,..)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,..)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,..)}{\partial z^2} + \dots$$

Aufgaben

Aufgabe 4

Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0$, $\varphi \in (-\pi,\pi)$.

a) Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r}$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von u dar.

b) Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)\,.$$

Lösung

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
v_{rr}(r,\varphi) = \cos\varphi\,\big(&u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ \cos\varphi + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ \sin\varphi\big)\\
&+ \sin\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ \cos\varphi + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ \sin\varphi\big)\\
= \cos^2\varphi\, &u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + 2\sin\varphi\ \cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) &= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\\
&\quad - r\sin\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big)\\
&\quad - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\\
&\quad + r\cos\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big)\\
&= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\\
&\quad + r^2\sin^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 2r^2\sin\varphi\ \cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\\
&\quad + r^2\cos^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi) &= v_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\, v_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\, v_{\varphi\varphi}(r,\varphi)\\
&= (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big)\\
&= u_{xx}(x,y) + u_{xx}(x,y) = \Delta u(x,y)
\end{aligned}$$

mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

Fehler: $u_{yy}(x,y)$

Aufgaben

H14: A2

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)\,.$$

Hinweis: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.