Tutorium 12

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

11.Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei γ eine Kurve, deren Träger der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist. $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\right\}.$$

b) Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\iiint\limits_B \sin z \, d(x,y,z)$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für alle $a, b, c > 0$ das Volumen $\iiint\limits_E d(x,y,z)$ des Ellipsoids

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\right\}.$$

Zusammenfassung

- Gaußscher Integralsatz
  - Anwendung
- Kugelkoordinaten
  - Transformationsformel

Gaußscher Integralsatz

- Sei eine Funktion $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben, dann gilt nach dem Gaußschen Integralsatz:

Wegintegral über einer geschlossenen Kurve

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d(x, y)$$

Rand des Gebiets G

Gebiet G

Aufgaben

Aufgabe 1

Es sei γ eine Kurve, deren Träger der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist. $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgaben

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\; 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\}\,.$$

b) Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\iiint\limits_B \sin z \, d(x, y, z)$.

Kugelkoordinaten

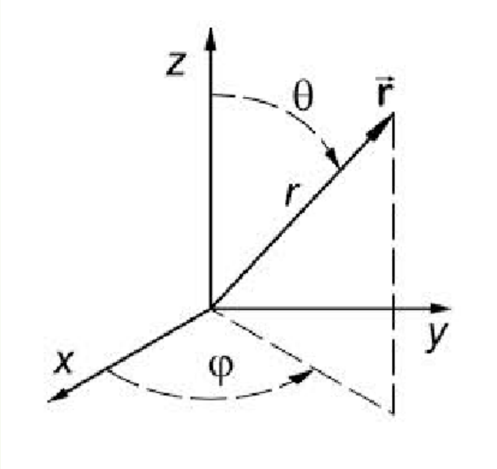
- Es gelte allgemein folgende Formel aus dem HM2 Skript:

$$\int_A f(x)\,dx = \int_B f(\Phi(y))|\det(\Phi'(y))|\,dy.$$

Sei A eine Kugel, dann bietet sich die Anwendung der Kugelkoordinaten an.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi'(r,\varphi,\vartheta) = -r^2\sin\vartheta.$$



Aufgaben

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für alle $a, b, c > 0$ das Volumen $\iiint\limits_E d(x, y, z)$ des Ellipsoids

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1 \right\}.$$