Tutorium 13

HM2- Elektrotechnik und Informationstechnik

Pascal Weber

12.Übungsblatt

Aufgabe 1

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ mit der Oberfläche $\mathcal{F}$ sowie das Vektorfeld $\vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{w}(x, y, z) = (z, y, z+1)^T$. Berechnen Sie den Fluß $\iint_{\mathcal{F}} \vec{w}\, d\vec{\sigma}$ des Vektorfeldes $\vec{w}$ durch die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Kegels K nach außen.

Probeklausur SS18:

Aufgabe 1 (12+8 Punkte)

a) Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A.

b) Seien $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$ an.

Zusammenfassung

- Oberflächenintegrale:
  - Formeln
  - Berechnung
- Gram-Schmidt Verfahren:
  - Formel

Oberflächenintegrale

- Sei F eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $\vec{w}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Dann berechnet sich der Fluss von $\vec{w}$ durch die Fläche F wie folgt:

$$\iint_F \vec{w} d\vec{o} = \iint_B \vec{w}(\vec{g}(u,v)) \cdot (\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)) d(u,v)$$

$\vec{N}$ ist der Normalenvektor auf der Fläche F.
Ist F die Oberfläche eines Körpers, dann muss für die Berechnung des Flusses $\vec{N}$ nach außen zeigen.

$\vec{g}(u,v)$ ist eine Parametrisierung der Fläche F.

$$d\vec{o} = \vec{N} do$$

$$do = \|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\| d(u,v)$$

$$\vec{N} = \frac{\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)}{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}$$

$$d\vec{o} = \partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) d(u,v)$$

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ mit der Oberfläche $\mathcal{F}$ sowie das Vektorfeld $\vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{w}(x, y, z) = (z, y, z+1)^T$. Berechnen Sie den Fluß $\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{w}\, d\vec{\sigma}$ des Vektorfeldes $\vec{w}$ durch die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Kegels K nach außen.

Lösung

Bemerkung: Alternativ kann man $\iint_{\partial K} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do$ auch mit dem Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$ (Diesen nennt man auch den *Gaußschen Integralsatz.*) berechnen:

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{K} \nabla \cdot \vec{f}\, d\tau = \iiint\limits_{K} 2\, d(x,y,z),$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben haben. Mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

lässt sich K charakterisieren durch

$$r \in [0,2], \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \qquad z \in [0, 2-r],$$

so dass folgt

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\partial K} \vec{w} \cdot \vec{N}\, do &= 2 \iiint\limits_{K} d(x,y,z) = 2\int_0^2 \int_0^{2-r} \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dz\, dr \\ &= 4\pi \int_0^2 \int_0^{2-r} r\, dz\, dr = 4\pi \int_0^2 (2r - r^2)\, dr = 4\pi \left[r^2 - \tfrac{1}{3} r^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Gram-Schmidt Verfahren

- Seien $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren. Gesucht ist eine Orthonormalbasis (ONB) von $lin\{y_1, y_2, y_3\}$. $\longrightarrow$ Gram-Schmidt Verfahren

ONB: ges.: $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$

1. Schritt: $v_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$

2. Schritt: $y_2' = y_2 - \langle y_2, v_1 \rangle \cdot v_1$ $\qquad v_2 = \dfrac{y_2'}{\|y_2'\|}$

3. Schritt: $y_3' = y_3 - \langle y_3, v_1 \rangle \cdot v_1 - \langle y_3, v_2 \rangle \cdot v_2$ $\qquad v_3 = \dfrac{y_3'}{\|y_3'\|}$

Aufgaben

Probeklausur SS18:

Aufgabe 1 (12+8 Punkte)

a) Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A.

b) Seien $y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}\{y_1, y_2, y_3\}$ an.