

Kapitel 1.1 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

Motivation: Die Differentialgleichung

$$f'(t) = 4f(t) \quad \text{hat die Lösungen}$$

$$f(t) = D e^{4t}, \quad D \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

Frage: könnte man das folgende Differentialgleichungssystem lösen?

$$x'(t) = -x(t) + 3y(t) \quad (1)$$

$$y'(t) = 5x(t) + y(t) \quad (2)$$

Antwort: Sei $u(t) = x(t) + y(t) \quad (3)$

$$\text{Dann } u'(t) = x'(t) + y'(t) \quad \underline{\underline{(1)(2)}}$$

$$= -x(t) + 3y(t) + 5x(t) + y(t) = 4x(t) + 4y(t)$$

$$\underline{\underline{(3)}} \quad 4u(t) \Rightarrow \boxed{u'(t) = 4u(t)}$$

$$\text{Also } u(t) = C e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{(3)}} \Rightarrow \boxed{x(t) + y(t) = C e^{4t}} \quad (4)$$

ähnlich sei $v(t) = 5x(t) - 3y(t)$ (5)

mit ähnlichen Berechnungen, wie im Fall von $u(t)$ bekommt man

$$\boxed{v'(t) = -4v(t)} \Rightarrow v(t) = De^{-4t}, D \in \mathbb{R}$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow} \boxed{5x(t) - 3y(t) = De^{-4t}} \quad (6)$$

Wenn man das Gleichungssystem (4), (6) bezüglich $x(t), y(t)$ auflöst bekommt man

$$x(t) = \frac{1}{8} (3Ce^{4t} + De^{-4t})$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}} \quad y(t) = \frac{1}{8} (5Ce^{4t} - De^{-4t})$$

oder

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{C}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{4t} + \frac{D}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

$C, D \in \mathbb{R}$

Bemerkung: Wir konnten das System

lösen weil $u'(t) = 4u(t)$ $v'(t) = -4v(t)$
also $u(t), v(t)$ entkoppelt sind ($u'(t)$)

hängt nicht von $v(t)$ ab und $v'(t)$ hängt nicht von $u(t)$ ab).

Frage: wie findet man $u(t), v(t)$

Antwort: man schreibt das ursprüngliche System (1), (2) als

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (8), \text{ und}$$

arbeitet man mit den so genannten Eigenwerten und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Def Sei $A \in K^{n \times n}$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$

heißt Eigenwert (EW) von A , falls es ein $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gibt mit $\boxed{\vec{x} \neq \vec{0}}$ und

$A \vec{x} = \lambda \vec{x}$. $\vec{x}$ heißt Eigenvektor

(EV) zum Eigenwert λ von A .

Bsp 11.1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ (gleiche Matrix wie in (8))

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Also ist 4 EW von A und $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
EV zum EW 4 .

Ähnlich $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Also ist -4 EW von A und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
EV zum EW -4 , von A .

Bemerkung: Beobachten Sie die
Anwesenheit der EW und EV von
 A in (7). Das ist kein Zufall
wie wir lernen werden.

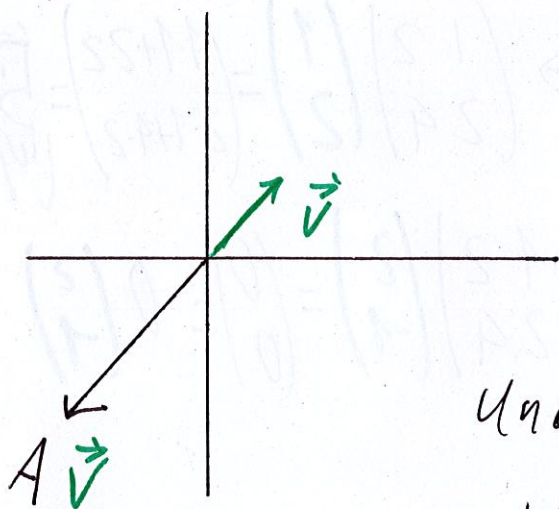
Geometrische Interpretation in $\mathbb{R}^n$

$\vec{v}$ EV von $A \Leftrightarrow A\vec{v}$ sind parallel.

In diesem Fall vergleicht die Größe und die Richtung von $A\vec{v}$, $\vec{v}$.

Wenn z.B. $A\vec{v} = -2\vec{v}$

dann zeigt $A\vec{v}$ in die andere Richtung und ist zweimal so groß wie $\vec{v}$.



Wählen Sie alle richtigen Antworten.

$\vec{v}$ ist Eigenvektor von A wenn

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\times$ $\rightarrow$ weil $\vec{v} = \vec{0}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\checkmark \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\checkmark \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\times$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ gar nicht gleiche Dimension, weil A nicht quadratisch ist.

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\times$

$A \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ was nicht parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot \lambda = 3 \\ 2 \cdot \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases}$ widersprüchlich.

Der Eigenraum von A zum EW λ ist

$$E_A(\lambda) := \{ \vec{x} \in \mathbb{C}^n : A \vec{x} = \lambda \vec{x} \} = \text{Kern}(A - \lambda I)$$

Bsp 1.1.2 $E \left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \middle| 4 \right) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$

Weil $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -5a + 3b = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ wobei } c \in \mathbb{C}.$$

Allgemein gilt $A \vec{x} = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow A \vec{x} = \lambda I \vec{x}$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I) \vec{x} = \vec{0}. \text{ Also } E_A(\lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I)$$

Wie findet man EW von A .

λ ist EW von $A \Leftrightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0}$

mit $(A - \lambda I) \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\text{Kern}(A - \lambda I) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow A - \lambda I$
nicht invertierbar

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

Also

λ ist EW von $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ (*)

1.2 Charakteristisches Polynom

Auf Grund von (*). definieren wir
das Charakteristische Polynom p_A

von A durch $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Wenn $A \in K^{n \times n}$ ist $p_A(\lambda)$ ein
Polynom vom Grad n . Aus (*) folgt.

λ ist EW von $A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$.

Bsp 1.2.1 | $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 5$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1) - 15 = \lambda^2 - 16 = (\lambda-4)(\lambda+4).$$

Also $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$ oder $\lambda = -4$.

Also sind $4, -4$ die Eigenwerte von A .

Zusammenfassung: Um die Eigenwerte einer Matrix A zu finden, bestimmen wir $p_A(\lambda)$ und die Eigenwerte sind seine Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Da $E_A(\lambda_j) = \text{Kern}(A - \lambda_j I)$ um die Eigenräume $E_A(\lambda_j)$ zu bestimmen, bestimmen wir $\text{Kern}(A - \lambda_j I)$ entweder direkt, wie im Bsp 1.1.2 oder mit dem -1 Ergänzungssatz.

↑
Sehr wichtig.

1.3 Ähnliche Matrizen

Def $D, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißen ähnlich falls es $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, mit S invertierbar

und

$$D = S^{-1} A S$$

Bsp 1.3.1 Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, wie in Bsp 1.1.1.

Sei $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ dann $S^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\text{da } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right)$$

Also $S^{-1} A S =$

$$= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 20 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{Also sind } \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ ähnlich.}$$