

Anwendung: Wir betrachten das Differenzialgleichungssystem $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (*)$ ⁽¹⁾

wobei $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Sei $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ (wie in Bsp 1.31)

und $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Wählen Sie

alle richtigen Aussagen

(1) $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = S^{-1} A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = S^{-1} A S \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

(5) gar keine Ahnung.

(1) stimmt wegen Linearität der

Ableitung. Das kann man auch explizit illustrieren.

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Bsp 1.31}} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} x(t)+y(t) \\ 5x(t)-3y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} x'(t)+y'(t) \\ 5x'(t)-3y'(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

(2). Stimmt da $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$S \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \underbrace{SS^{-1}}_{=I} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow S \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

(3) Stimmt da $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} S^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} S^{-1} A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$

(4) Stimmt da $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=} S^{-1} A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} S^{-1} A S \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$

Bsp 1.3.1
 $\stackrel{**}{=} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Also $\begin{cases} u'(t) = 4u(t) \\ v'(t) = -4v(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C e^{4t} \\ D e^{-4t} \end{pmatrix}, C, D \in \mathbb{R}.$

(2) $\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C e^{4t} \\ D e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C e^{4t} + D e^{-4t} \\ 5C e^{4t} - D e^{-4t} \end{pmatrix}.$

1.4 Diagonalisierung von Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar falls sie ähnlich ist zu einer diagonalen Matrix D . ($\Rightarrow$) $\exists S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar, so dass

$$D := S^{-1} A S \text{ diagonal ist.}$$

$$\text{Bsp 1.4.1} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(aus Bsp 1.3.1.) Also ist

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar da

$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ diagonal ist

(4)

Satz 1.4.1 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar
 $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Basis von $\mathbb{C}^n$ $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$
 aus Eigenvektoren von A . Wenn

$$S = (\vec{s}_1 | \vec{s}_2 | \dots | \vec{s}_n) \quad \text{und} \quad A \vec{s}_j = \lambda_j \vec{s}_j, j=1, \dots, n. \quad (1)$$

dann $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \text{Diagonale Matrix.}$

Bem: Die Reihenfolge der **Eigenvektoren** in S entspricht die Reihenfolge der **Eigenwerte** in $S^{-1} A S$.

Das Bsp 1.4.1 illustriert den Satz da

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beweisidee von (2) wenn $n=2$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}}_{\vec{v} \quad \vec{w}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a v_1 + b v_2 \\ c v_1 + d v_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} a w_1 + b w_2 \\ a w_1 + b w_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}.$$

$$\text{oder } B(\vec{v} | \vec{w}) = (B\vec{v} | B\vec{w}) \quad (3) \quad (5)$$

$$\text{Also } S^{-1}AS = S^{-1}A(\vec{\xi}_1 | \vec{\xi}_2) \stackrel{(3)}{=} S^{-1}(A\vec{\xi}_1 | A\vec{\xi}_2)$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} S^{-1}AS = S^{-1}(\lambda_1 \vec{\xi}_1 | \lambda_2 \vec{\xi}_2) \stackrel{(3)}{=} (\lambda_1 S^{-1}\vec{\xi}_1 | \lambda_2 S^{-1}\vec{\xi}_2) \quad (4)$$

$$\text{Aber } (S^{-1}\vec{\xi}_1 | S^{-1}\vec{\xi}_2) \stackrel{(3)}{=} S^{-1}(\vec{\xi}_1 | \vec{\xi}_2) = S^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } \boxed{S^{-1}\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (5)$$

$$(4), (5) \Rightarrow S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Bsp 1.4.2 Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen

Sie S , so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist
und geben Sie $S^{-1}AS$ an.

S1 $p_A(\lambda)$ berechnen EWe bestimmen.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 1 =$$

$$(\lambda-2)^2 - 1^2 = [(\lambda-2)-1][(\lambda-2)+1] = (\lambda-3)(\lambda-1).$$

Also $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ oder $\lambda = 3$.

(6)

S2 Basen von $E_A(1)$, $E_A(3)$ bestimmen.

$$(A - 1I) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also $E_A(1) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-a + b = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also $E_A(3) = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ist $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dann gilt nach

Satz 1.4.1 $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Bem: Beobachten Sie die Übereinstimmung in den Reihenfolgen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $1/3$.

Wann ist aber möglich eine Matrix zu diagonalisieren? Das kann z.B. mit Hilfe der algebraischen und geometrischen Vielfachheit der Eigenwerte beantwortet werden.

1.5 Algebraische/geometrische Vielfachheit.

$A \in K^{n \times n}$, $\lambda_0 \in K$ EW von A
Vielfachheit von λ_0

geometrische = $\dim E_A(\lambda_0)$

algebraische

Vielfachheit von λ_0
als Nullstelle von $p_A(\lambda)$.

Bsp 1.5.1 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^3$$

Also ist 4 EW von A mit

algebraischer Vielfachheit 3

$$\dim E_A(4) = \text{Kern}(A - 4I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also geometrische Vielfachheit 2.

Bem 1.5.1 $2 \leq 3$ allgemein gilt (8)
geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit
eines EW des EW

Satz 1.5.1 Sei $A \in K^{n \times n}$ mit
 $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{a_1} (\lambda_2 - \lambda)^{a_2} \dots (\lambda_k - \lambda)^{a_k}$
und sei $g_j = \dim E_A(\lambda_j)$.
($a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$) Dann
 A diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k g_j = n \Leftrightarrow g_j = a_j$
 $\forall j \in \{1, \dots, k\}$.

Bsp 1.5.2 Die Matrix A von
Bsp 1.5.1 ist nicht diagonalisierbar
weil $3 \neq 2$.

Beweisidee: $g_j \leq a_j$ (Bem 1.5.1) und A ist
diagonalisierbar nach Satz 1.4.1
genau dann wenn es eine Basis gibt
von K^n aus EV von A ($\Rightarrow$)
 $\sum_{j=1}^k g_j = n \Leftrightarrow g_j = a_j \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$.