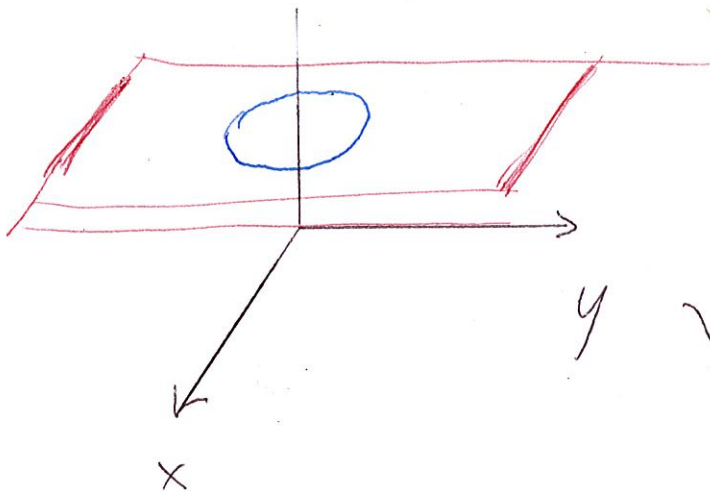


2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

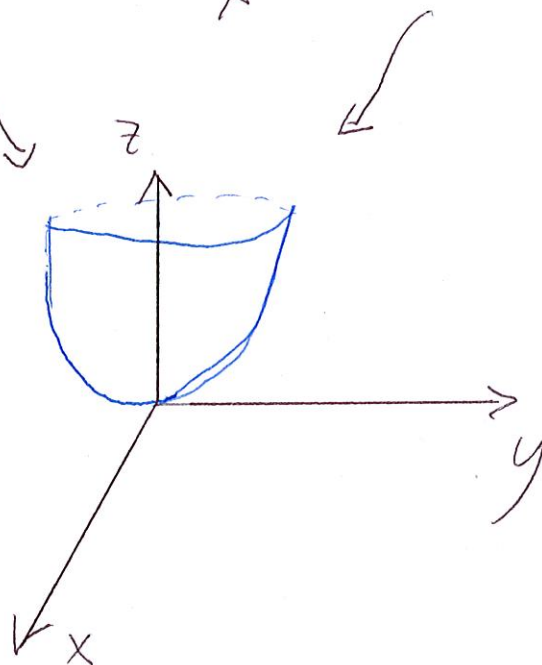
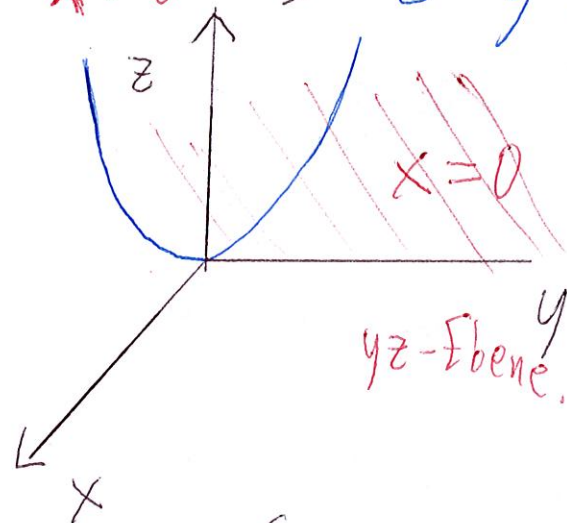
Bsp. Funktionen zwei Variablen.

i) $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

$z=1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$.



$x=0 \Rightarrow z=y^2$.



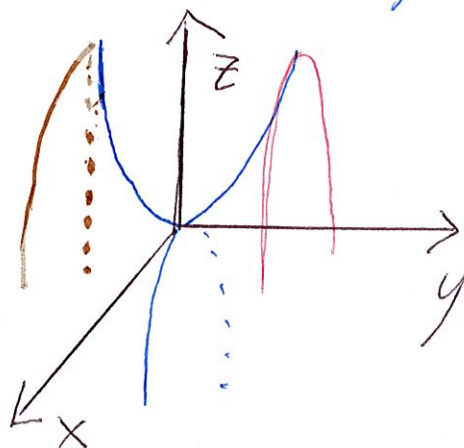
(ii) $z = f(x, y) = y^2 - x^2$.

$y=0 \Rightarrow z = -x^2$

$y=1 \Rightarrow z = 1 - x^2$

$y=-1 \Rightarrow z = 1 - x^2$

$x=0 \Rightarrow z = y^2$ (wie vorher)



$f(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 3z$ Funktion drei Variablen.

Ein paar Anwendungen.

- 1) Arbeit berechnen.
- 2) Fluss durch eine Fläche.
- 3) Flächeninhalt einer Fläche.
- 4) Bewegung in einer Fläche.
- 5) "Diffusion" der Wärme (auch in HMB).

Um die gestrige Wassergeschwindigkeit
des Rheins zu beschreiben bräuchten
wir eine Funktion.

- (1) 1 Variable
- (2) 2 Variablen
- (3) 3 Variablen
- (4) 4 Variablen
- (5) 5 Variablen
- (6) keine Ahnung.

(Mentimeter Frage).

[2.1 Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$

Eine Folge $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent falls alle Komponenten der Folge konvergent sind. In diesem Fall ist der Limes der Vektor dessen Komponenten die zugehörigen Grenzwerte sind.]

Bsp 2.1.1

Sei $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\ 1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \end{pmatrix}$. Dann

$$\vec{x}_k \rightarrow \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \text{ da } \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e \text{ und}$$

$$1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \rightarrow 0. \text{ (Man schreibt auch } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix})$$

2.2. Offene, abgeschlossene, wegzusammenhängende Mengen in $\mathbb{R}^n$.

[Ist $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ so heißt

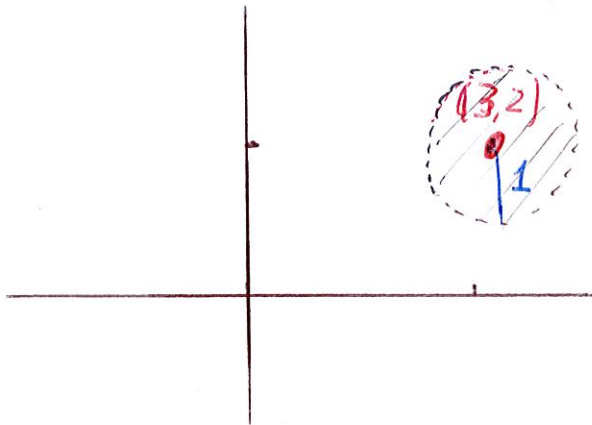
$$K(\vec{x}_0, r) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r \}$$
 offene

Kugel um $\vec{x}_0$ mit Radius r].

Bsp 2.11 In $\mathbb{R}^2$ ist $K\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right)$

$$= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| < 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| < 1 \right\}$$

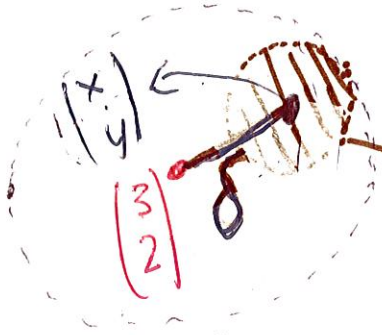


↓
Abstand von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
ist kleiner als 1
→ Kreisscheibe ohne
den Kreis $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 1$

[Definition : Eine Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls es zu jedem $\vec{x}_0 \in Q$ ein (von $\vec{x}_0$ abhängiges) $\epsilon > 0$ gibt mit $K(\vec{x}_0, \epsilon) \subseteq Q$. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.]

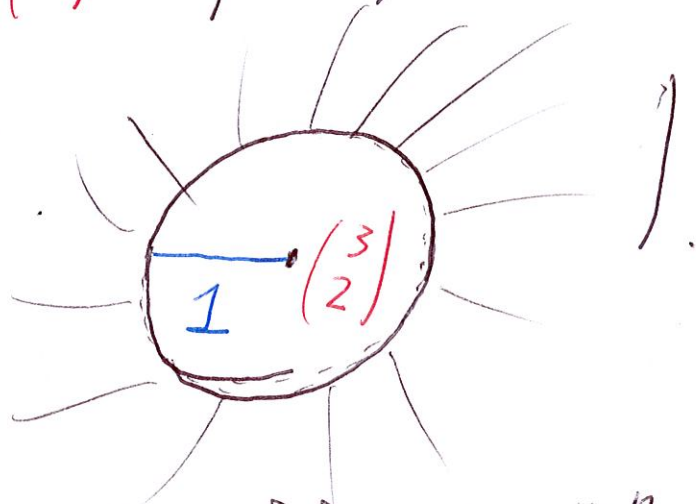
Bsp 2.12 $K\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right)$ ist offen.

Grund: Ist $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \delta < 1$.
dann ist $K\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 1 - \delta\right) \subset K\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right)$



Also ist $\mathbb{R}^2 \setminus K\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right)$ abgeschlossen.

(Skizze der Menge

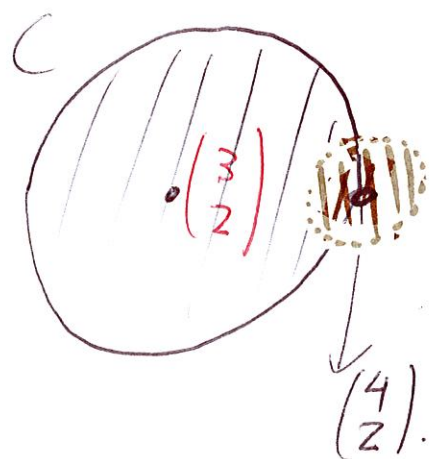


Allgemein ist $K(\vec{x}_0, r)$ offen in $\mathbb{R}^n$.

Bsp 2.2.3

$C := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \leq 1 \right\}$ ist.

aber nicht offen, weil z.B.



$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in C$ aber

$K\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \delta\right)$ ist keine
Teilmenge von C , egal
wie klein δ ist.

Man kann aber zeigen, dass $\mathbb{R}^n \setminus C$
offen ist (ähnlich wie im Bsp 2.2.2). Daraus
folgt: C ist abgeschlossen.

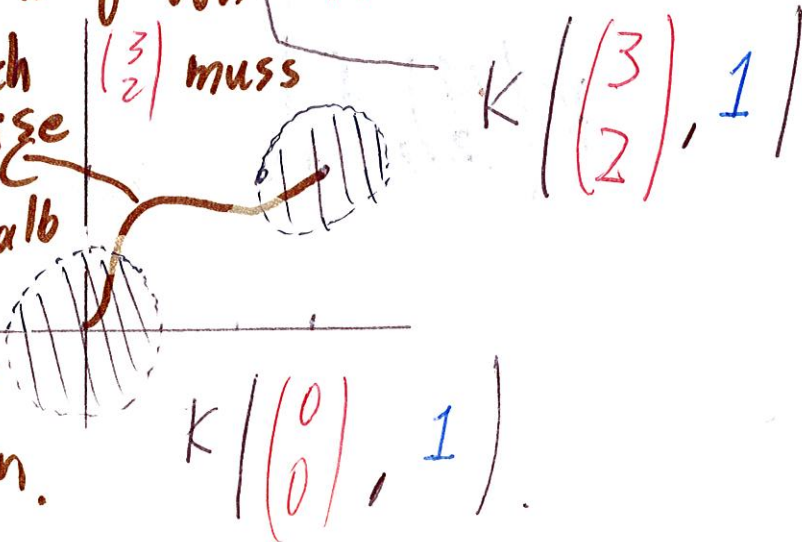
[Definition: Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $D \neq \emptyset$ heißt weg zusammenhängend, falls es für jedes paar $\vec{x}, \vec{y} \in D$ einen weg von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$ in D gibt, (d.h. eine $f: [0,1] \rightarrow D$ $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ mit $f_1, \dots, f_n$ stetig, und mit $f(0) = \vec{x}, f(1) = \vec{y}$).

[Bsp 2.2.4] $K\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right)$ ist weg zusammenhängend

aber $D := K\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right) \cup K\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right)$ ist

nicht, da es keinen weg von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ in D gibt.

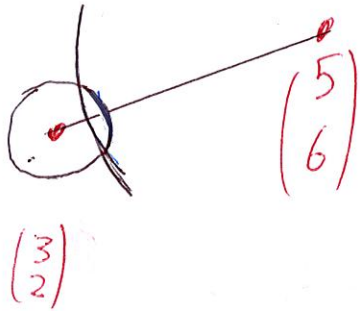
jeder weg von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ muss teilweise außerhalb der Menge D sein.



Bsp 22.5 Für welche $\alpha > 0$ ist

$K\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 1\right) \cup K\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha\right)$ weg zusammenhängend?

Antwort: Für die $\alpha > 0$
mit



$$\underbrace{\alpha + 1}_{\text{Summe der Radien}} > \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}_{\text{Abstand der Zentren}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 1 > \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\Leftrightarrow \alpha > \sqrt{20} - 1.$$