[2.3 Limes und Stetigkeit von Funktionen von mehreren Variablen

Def Sei $f: D \to \mathbb{R}^m$, wobei z.B. $D \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend, mit mehr als ein Elemente. oder offen. Wir sagen, dass

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{c},$$

wenn $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ so, dass

$$0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{c}\| < \varepsilon.$$]

wenn $\vec{x}$, $\vec{x}_0$ approximiert

abet $\vec{x} \neq \vec{x}_0$.

dann

$f(\vec{x})$ approximiert $\vec{c}$.

Bsp 2.3.1 Sei $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$ Dann $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$,

weil

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1 \text{ weil } x^2 \leq x^2+y^2} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1 \text{ weil } y^2 \leq x^2+y^2} |y| \leq |y| \to 0.$$

[Satz : Es gilt $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{c}$

$\Leftrightarrow$ $f(\vec{x}_K) \to \vec{c}$, für alle Folgen $\vec{x}_K$ mit $\vec{x}_K \to \vec{x}_0$.]

$\boxed{\text{Bsp. 2.3.2}}$ Sei $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$f(x,y) = \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$. Dann

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ existiert nicht Gründ

$\left(\frac{1}{K}, 0\right) \to (0,0)$ und $f\left(\frac{1}{K}, 0\right) = 0 \to 0$.

Aber $\left(\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right) \to (0,0)$ und $f\left(\frac{1}{K}, \frac{1}{K}\right) = \dfrac{\frac{1}{K} \frac{1}{K^3}}{\left(\frac{2}{K^2}\right)^2} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}$

und $\frac{1}{4} \neq 0$.

[Def : $f: D \to \mathbb{R}^m$ (wobei z.B. $D \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend mit mehr als ein Elementen, oder offen) heißt <u>stetig in $\vec{x}_0$</u> falls $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$. Sie heißt <u>stetig in D</u>, falls sie stetig in jedem $\vec{x}_0 \in D$ ist.]

Summe, Skalarprodukt, Kompositionen usw von stetigen Funktionen sind stetig in $\vec{x}_0$

$\boxed{\text{Bsp 2.3.3}}$ $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \text{wenn } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist stetig in $(0,0)$, wenn $a=0$, da

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \underset{\text{Bsp 2.3.1}}{\overset{\text{siehe}}{=\!=\!=}} 0$$

g ist stetig in (x_0,y_0) auch wenn $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

$\boxed{\text{Bsp 2.3.4}}$ $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \text{wenn } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist nicht stetig in $(0,0)$ egale was a ist da

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \text{ nicht existiert.}$$

(siehe Bsp 2.3.2).

[Def 19.3.4 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und

$f: I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$. f heißt

differenzierbar in t_0 [bzw differenzierbar in I] [bzw. stetig differenzierbar in I]

falls $f_1, \ldots, f_n$ alle differrenzierbar in t_0 [bzw differenzierbar in I] [stetig differenzierbar in I] sind.]

Bsp 3.25 zum Limes

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^{1,5}}{x^2+y^2} = 0, \quad \text{Da}$$

$$\left| \frac{x|y|^{1,5}}{x^2+y^2} \right| = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \; \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1 \text{ da}} |y|^{\frac{1}{2}} \leq 1 \cdot |y|^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

wenn $(x,y) \to (0,0)$.

da $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

2.4 Raumkurven

[Eine <u>Raumkurve</u> ist eine stetig differenzierbare Funktion $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Die Menge $\gamma(I)$ heißt <u>Spur von γ</u> oder <u>Bild von γ</u>.]

<u>Bsp</u> $\gamma_1 : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. $\|\gamma_1(\theta)\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

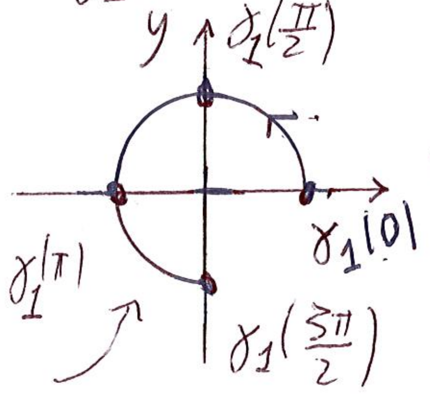


Bild von γ_1

$\gamma_1(0) = (1,0)$

$\gamma_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$

$\gamma_1(\pi) = (-1,0)$

$\gamma_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-1)$.

$\gamma_2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t)$.

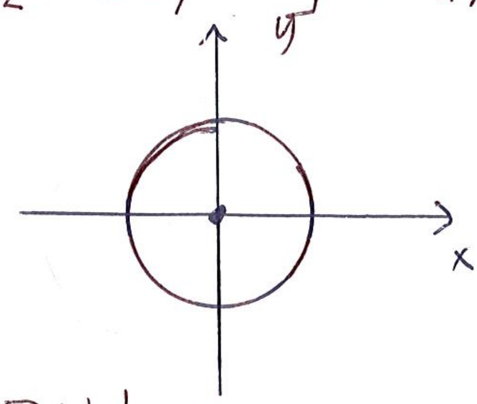
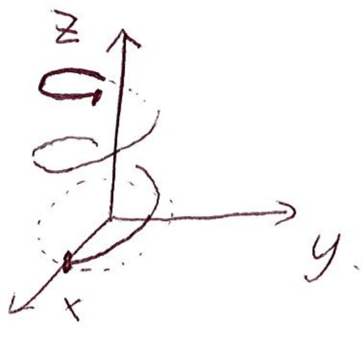


Bild von γ_2 ist der Kreis $x^2 + y^2 = 1$

$\gamma_3 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_3(t) = (\cos t, \sin t, t)$.



Bogelänge von Raumkurven

[Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Raumkurve, so ist ihre <u>Bogenlänge</u> gegeben durch $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$].

$\gamma'(t)$: Geschwindigkeit des Punktes

$\|\gamma'(t)\|$: größe der Geschwindigkeit.

$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$: **Integral der größe der Geschwindigkeit.**

Interpretation:
Sei $\gamma(t)$ der Ort eines sich bewegenden Punktes an der Zeit t.

Bem: Die Bogenlänge einer Kurve der Art $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ ist $\int_0^\infty \|\gamma'(t)\|\, dt$ (wenn das Integral konvergiert).

Bsp (Klausur 2015) Bestimmen Sie die Bogenlänge von $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t})$.

Lösung: Schritt 1. $\gamma'(t)$ berechnen

Schritt 2 $\|\gamma'(t)\|$ berechnen

Schritt 3 $\int_0^\infty \|\gamma'(t)\|\,dt$ berechnen.

1. $\gamma'(t) = \left((e^{-t}\cos t)', (e^{-t}\sin t)', (e^{-t})'\right)$

$$= \left(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t, -e^{-t}\right).$$

2.

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t)^2 + (-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)^2 + (e^{-t})^2}$$

$$= \Big[e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}\sin^2 t + \cancel{2e^{-2t}\cos t \sin t}$$
$$e^{-2t}\sin^2 t + e^{-2t}\cos^2 t - \cancel{2e^{-2t}\cos t \sin t} + e^{-2t}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}{=} \left(e^{-2t} + e^{-2t} + e^{-2t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(3e^{-2t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{3}\, e^{-t}.$$

3. $L(\gamma) = \int_0^\infty \|\gamma'(t)\|\,dt = \sqrt{3} \int_0^\infty e^{-t}\,dt$

$$= \sqrt{3} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t}\,dt = \sqrt{3} \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-t} \Big|_0^b \right]$$

$$= \sqrt{3} \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = \sqrt{3}.$$

2.6. Richtungsableitungen/partielle Ableitungen

[Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}^m$.

Def f heißt in $\vec{x}_0 \in D$ in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ differenzierbar, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

in $\mathbb{R}^n$ existiert. Dann heißt

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0)$ Richtungsableitung von f in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$].

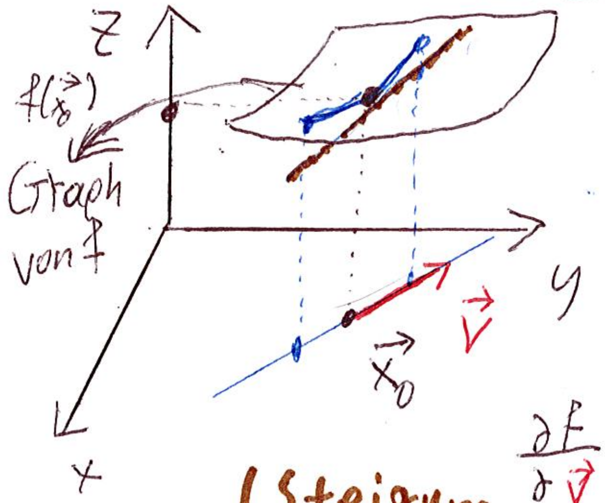


Illustration im Fall von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$z = f(x,y)$

Wenn $\|\vec{v}\| = 1$, dann ist $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ Änderungsrate von f (Steigung der braunen Gerade der Skizze) wenn $\vec{x}_0$ in der Richtung von $\vec{v}$ sich ändert.

$\boxed{\text{Bsp 2.6.1}}$ Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^2$. Bestimmen Sie

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ wobei } \vec{v} = (1,-1).$$

Lösung: $$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + t(1,-1)\right) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+t, \frac{1}{2}-t\right) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}+t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-t\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\left[\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + t^2 + \cancel{t}\right] + \left[\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + t^2 - \cancel{t}\right] - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2t^2}{t} = 0.$$

Partielle Ableitungen I

[Die Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k} \quad \text{wobei} \quad \vec{e}_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{k\text{-te}}, \ldots, 0).$$

heißen partielle Ableitungen von f.

Man schreibt z. B $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) = f_{x_k}(\vec{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(\vec{x}_0)$]

$(f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n))$.

in der Richtung von $\vec{e}_k$ ändert sich nur x_k.

In der Praxis (meistens) differenziert man bezüglich x_k wobei die anderen Variablen die Rolle einer Konstante spielen.

Bsp 2.6.2 Sei $f(x,y,z) = xy^2 + e^{yz}$. $\quad ((e^{ax})' = ae^{ax})$.

Dann $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy + z e^{yz}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y e^{yz}.$$