2.10 (partielle) Ableitungen höherer Ordnung.

z.B $\quad f(x,y) = xy + y^2 e^x \quad (7)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2ye^x) = 1 + 2ye^x. \quad (8)$$

man schreibt auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oder f_{xy}

zweite Ordnung

$f_{xyxy} \rightarrow$ vierte Ordnung

Def ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) $f: D \to \mathbb{R}^m$ heißt k-mal stetig differenzierbar falls alle partielle Ableitungen von Ordnung $\leq k$ auf D existieren und stetig sind $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$.

(für $k=1$ heißt die Funktion stetig differenzierbar und nach Satz 2.8.1 ist sie in dem Fall differenzierbar)

Sei f, wie in (7), dann

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y + y^2 e^x)$$

$$= 1 + 2ye^x \overset{(8)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y).$$

allgemein gilt: Satz von Schwarz:

Ist $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$, so sind alle partielle Ableitungen von Ordnung $\leq k$

partielle Ableitungen von Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen z.B
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$ dann $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$.

2.11 Kettenregel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}^m$ dbar in $\vec{x}_0 \in D$. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $f(D) \subseteq G$. Sei $g: G \to \mathbb{R}^p$ dbar in $\vec{y}_0 = f(\vec{x}_0)$. Dann $g \circ f$ ist dbar in $\vec{x}_0$ und

$$\boxed{\underbrace{(g \circ f)'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = \underbrace{g'(f(\vec{x}_0))}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} \underbrace{f'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}}$$

($f(D) \subseteq G$ sorgt dafür, dass $g \circ f: D \to \mathbb{R}^p$ definiert ist).

Illustration der Kettenregel (intuitiv).

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - f'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0 \quad \text{Also}$$

nah bei $\vec{x}_0$ gilt $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \approx f'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$ (1)

ähnlich nah bei $f(\vec{x}_0)$ gilt

$$g(\vec{y}) - g(f(\vec{x}_0)) \approx g'(f(\vec{x}_0))(\vec{y} - f(\vec{x}_0)). \Rightarrow$$

wenn $\vec{x}$ nah bei $\vec{x}_0$ ist $f(\vec{x})$ nah bei $f(\vec{x}_0)$)

wenn $\vec{x}$ nah bei $\vec{x}_0$ ist $f(\vec{x})$ nah bei $f(\vec{x}_0)$)

$$g(f(\vec{x})) - g(f(\vec{x}_0)) \approx g'(f(\vec{x}_0))(\underbrace{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}) \quad (2)$$

$(1) \to (2) \implies \quad g(f(\vec{x})) - g(f(\vec{x}_0)) \approx g'(f(\vec{x}_0))\, f'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$

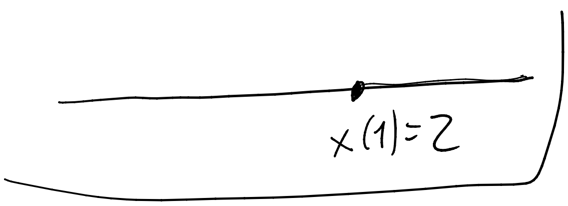
für $\vec{x}$ nah bei $\vec{x}_0$.

Also $(g \circ f)'(\vec{x}_0) = g'(f(\vec{x}_0))\, f'(\vec{x}_0)$.

Bsp 2.11.1 Ein Käfer bewegt sich auf der reellen Achse. Die Temperatur als Funktion der Zeit t und des Ortes x wird gegeben durch $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$$T(t, x) = x^3 t + x^2(t^2 + t + 1) + 2tx + 6.$$

Sei $x(t)$ der Ort des Käfers am Zeitpunkt t. Ist $x(1) = 2$ (5) und $x'(1) = 3$. (6) bestimmen Sie $\frac{d}{dt} T(t, x(t))\Big|_{t=1}$ (Änderungsrate der Temperatur, die der Käfer im Moment $t=1$ spürt).



Lösung: Sei $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$ $(D = \mathbb{R}^1, G = \mathbb{R}^2)$

Dann $g(t) := T(t, x(t)) = T(f(t))$. Ferner

$f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ x(1) \end{pmatrix} \overset{(5)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (3), $\quad f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ x'(t) \end{pmatrix}$ (4)

$\implies f'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ x'(1) \end{pmatrix} \overset{(6)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (7)

$$\Rightarrow f'(1) = \begin{pmatrix}1\\ x'(1)\end{pmatrix} \overset{(6)}{=} \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \quad (7)$$

Da $f(D) = f(\mathbb{R}^1) \subseteq \mathbb{R}^2 = G$

f ist dbar in 1 und T ist auch dbar (als Polynom) also ist insbesondere T dar in $f(1)$. Deshalb gilt nach der Kettenregel.

$$g'(1) = \frac{d}{dt} T(t,x(t))\Big|_{t=1} = (T\circ f)'(1) = T'(f(1))\, f'(1) \quad (8)$$

$$T'(t,x) = \begin{pmatrix} T_t(t,x) & T_x(t,x)\end{pmatrix} \quad (10)$$

$$= \begin{pmatrix} x^3+2t\,x^2+x^2+2x & 3x^2t+2x(t^2+t+1)+2t\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T'(f(1)) \overset{(3)}{=} T'(1,2) = \begin{pmatrix}24 & 26\end{pmatrix} \quad (9)$$

Aus (8), (9), (7) folgt

$$g'(1) = \frac{d}{dt} T(t,x(t))\Big|_{t=1} = \begin{pmatrix}24 & 26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = 24\cdot 1 + 3\cdot 26 = 102$$

Bem: Aus (4), (10) und der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dt} T(t,x(t)) = \begin{pmatrix} T_t(t,x(t)) & T_x(t,x(t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x'(t)\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} T(t,x(t))}_{\text{Änderungsrate der Temperatur die der Käfer spürt}} = \underbrace{T_t(t,x(t))}_{\text{Änderungsrate wegen Änderung der Bedingungen}} + \underbrace{T_x(t,x(t))\,x'(t)}_{\text{Änderungsrate wegen der Bewegung}}.$$

Käfer spürt der Bedingungen Bewegung.

(z.B wenn ein Feuer stärker wird)

z.B, weil wir Näher aus Feuer kommen

Unterschied zwischen $\frac{d}{dt} T(t, x(t))\Big|_{t=t_0}$, $T_t(t, x(t))\Big|_{t=t_0}$

Bewegung wird nicht berücksichtigt. $\leftarrow$ $T_t(t, x(t))\Big|_{t=t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{T(t_0+h, x(t_0)) - T(t_0, x(t_0))}{h}$.

Bewegung wird berücksichtigt $\leftarrow$ $\frac{d}{dt} T(t, x(t))\Big|_{t=t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{T(t_0+h, x(t_0+h)) - T(t_0, x(t_0))}{h}$

Orthogonalität des Gradienten auf Niveaumengen

Niveauxmengen von $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

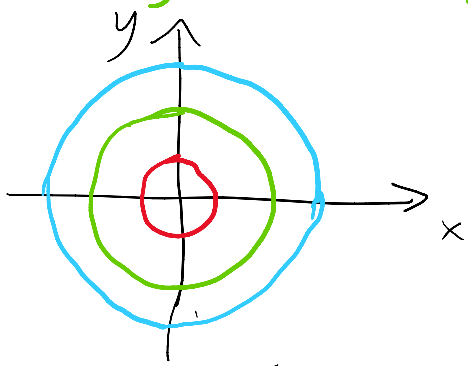
$\{\vec{x} \in D : f(\vec{x}) = c\} \to$ (wo hat f den Wert c?)

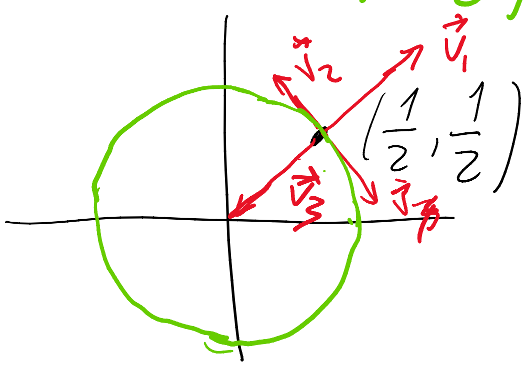
Bspl Sei $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$.

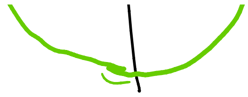
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \frac{9}{5}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{5}\}$.

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \frac{3}{2}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$.







$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}-2x\\-2y\end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ ist in der Richtung von $\vec{v}_3$. Ist senkrecht auf C in $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Das ist kein Zufall.

$\nabla f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \perp \vec{v}_2, \vec{v}_4$ da. $0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_2}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \nabla f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cdot \vec{v}_2$

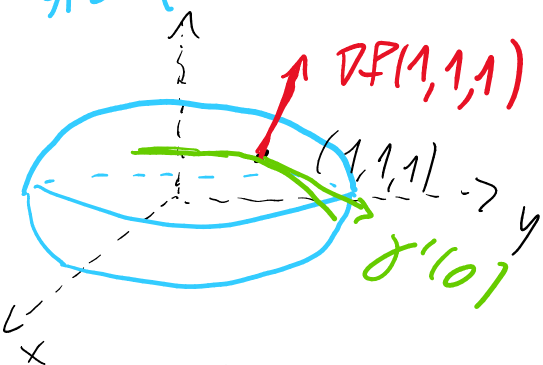
und $0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_4}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \nabla f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cdot \vec{v}_4$.

Allgemein: Wenn f dbar steht $\nabla f(\vec{x}_0)$ immer senkrecht auf der Niveaux Menge $\{\vec{x} \in D : f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$.

Das gilt insbesondere für $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dbar.

$\boxed{\text{Bsp 1}}$ $f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2$, ist $\vec{x}_0 = (1,1,1)$ dann

$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = f(1,1,1)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = \frac{9}{4}\}$



$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix}f_x\\f_y\\f_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\y/2\\2z\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix}2\\1/2\\2\end{pmatrix}$

Beweisidee, dass $\nabla f(1,1,1)$ senkrecht zu A ist im Punkt $(1,1,1)$ mit der Kettenregel.

Sei $\gamma: \mathbb{R} \to A$ eine Raumkurve mit

Sei $\gamma : \mathbb{R} \to A$ eine Raumkurve mit $\gamma(0) = (1,1,1)$, $\gamma'(0) \neq 0$. Dann $f(\gamma(t)) = \frac{9}{4}$, weil $\gamma(t) \in A$.

Also $\left(f(\gamma(t))\right)' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = 0 \xRightarrow{\text{Kettenregel}}$

$f'(\gamma(0))\, \gamma'(0) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{\gamma(0)}_{=(1,1,1)}) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(0)) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(0)) \right) \gamma'(0) = 0.$$

$\Rightarrow \quad \nabla f(1,1,1) \cdot \gamma'(0) = 0$. Also

$\nabla f(1,1,1) \perp \gamma'(0)$ für alle solche Kurven γ. Also steht $\nabla f(1,1,1)$ senkrecht zu A.

Anwendungen

Ein elektrisches Feld $\vec{E}$ "erzeugt" durch ein Potential V ist gegeben durch

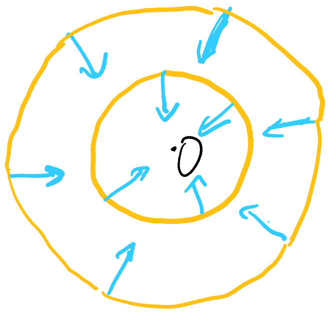
$$\vec{E}(x,y,z) = \underbrace{-\overbrace{\nabla V(x,y,z)}^{\text{In dieser Richtung steigt } V \text{ am schnellsten}}}_{\text{In dieser Richtung sinkt } V \text{ am Schnellsten.}}$$

Ähnlich für ein Gravitationsfeld.

$$V(x,y,z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \vec{E}(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$V(x,y,z) = -\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{-\frac{1}{\|\vec x\|}} \Rightarrow \vec E(x,y,z) = -\underbrace{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{-\frac{1}{\|\vec x\|^2}\frac{\vec x}{\|\vec x\|}}$$

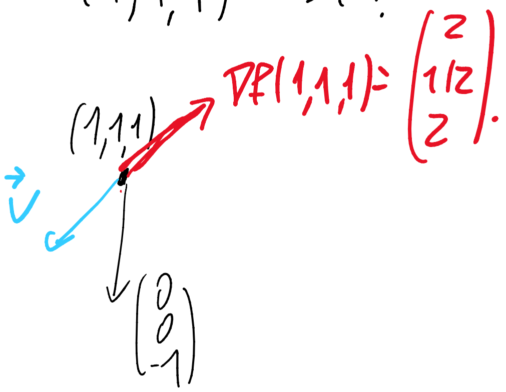
$$\vec x = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$



$\vec E$ ist senkrecht zu den Niveaumengen von V (In $\mathbb{R}^3$ heißen sie Äquipotenzielmengen).

Anwendung: Ein kleiner Ball bewegt sich frei ohne Reibung in A. (von Bsp 1) Die Erdanziehungskraft ist $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Wie viel ist die gesamte Kraft F, die auf den Körper wirkt, wenn der Ball in $(1,1,1)$ ist?



$$F = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} - \vec v.$$

Komponente parallel zu $\begin{pmatrix}2\\1/2\\2\end{pmatrix}$.

Diese Komponente wird von der Niveaumenge ausgeglichen.

Aber $\vec{v} = \left(\frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|}$

$$= \frac{1}{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{33}{4}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Also $F = \begin{pmatrix} 16/33 \\ 4/33 \\ -17/33 \end{pmatrix}$