

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Skalarfeld (auf D) und eine Funktion $\vec{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld (auf D).

Bsp 2.18.1 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $T(x, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$

ist ein Skalarfeld auf $\mathbb{R}^3$.

Mögliche physikalische Bedeutungen
 $T(x, y, z)$ = Temperatur / Potential / Dichte
 im Punkt (x, y, z) .

Bsp 2.18.2 $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

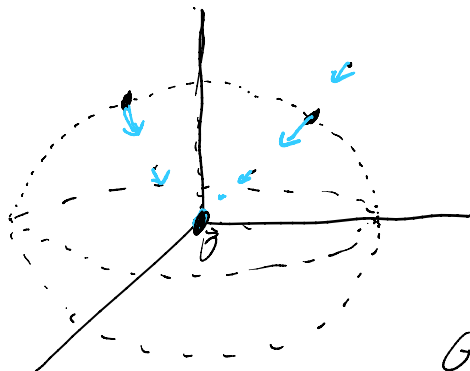
$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{cases} -\alpha \frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} & , \text{ wenn } \|\vec{x}\| \geq 2 \\ -\alpha \frac{\vec{x}}{4} & , \text{ wenn } \|\vec{x}\| \leq 2. \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$.

Skizze: $\vec{v}(\vec{x})$ ist immer parallel zu $\vec{x}$
 und wegen "-" zeigt die Richtung
 des Ursprungs $\vec{0}$.

$$\|\vec{x}\| \leq 2 \Rightarrow \|\vec{v}(\vec{x})\| = \left\| -\alpha \frac{\vec{x}}{4} \right\| = \alpha \frac{\|\vec{x}\|}{4}$$

$$\|\vec{x}\| \geq 2 \Rightarrow \|\vec{v}(\vec{x})\| = \left\| -\alpha \frac{2\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \right\| = \frac{2\alpha}{\|\vec{x}\|^2}$$



Dieses Vektorfeld
 ist für geeignete
 Konstante α eine
 Darstellung des
 Gravitationsfeldes, dass
 von einer homogenen Kugel von

Gravitationsfeld, ...
 von einer homogenen Kugel von
 Radius z erzeugt wird.

Bemerkung: Ist $f \in C^1$ ein Skalarfeld
 auf D , dann ist ∇f ein Vektorfeld
 auf D .
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Bsp: Ist V Elektrisches Potential/
 dann ist $-\nabla V$ elektrisches Feld
 ($\vec{E} = -\nabla V$)

Neue Bezeichnung: $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1, \dots, n$.

Rotation, Divergenz

Def Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1
 Vektorfeld, dann ist die Divergenz
 von $\vec{v}$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \dots + \partial_n v_n$$

(hier $D = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$).

und für $n=3$ ist die Rotation
 von $\vec{v}$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Die Bedeutung von div , rot werden
 wir in ein paar Wochen diskutieren.

Bsp 2.18.3 $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$.

1. ... $\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz + yz) = 2x + 2y + x + y = 3x + 3y$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= 2x + 0 + y = 2x + y.$$

$$\text{rot } \vec{v} \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(yz) \\ \frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - x \\ 0 - 0 \\ z - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - x \\ 0 \\ z - 2y \end{pmatrix}.$$

Skalarfeld Zusammenfassung.

$$\text{div } \underbrace{\vec{v}}_{\text{Vektorfeld}} = \nabla \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \partial_1 v_1 + \dots + \partial_n v_n$$

$$\underbrace{\text{grad } f}_{\text{Vektorfeld}} = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}.$$

skalarfeld.

$$\underbrace{\text{rot } \vec{v}}_{\text{Vektorfeld}} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Vektorfelder mit $\text{div } \vec{v} = 0$ heißen quellenfrei und Vektorfelder mit $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ heißen wirbelfrei (den Grund

' $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ heißen wirbelfrei (den Grund werden wir in ein paar Wochen diskutieren).
 (Hinweis: Konservative Felder sind wirbelfrei)

$$\alpha > 0 \quad \alpha \operatorname{div} \vec{E} = \rho$$

$\swarrow$ elektrisches Feld $\searrow$ Ladungsdichte.

Laplaceoperator Für C^2 Skalarfelder f definiert man den Laplaceoperator durch

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$\nwarrow$ Skalarfeld.
 $\nwarrow$ Vektorfeld.
Skalarfeld

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix} = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \dots + \partial_n^2 f.$$

und für C^2 Vektorfelder $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ definiert man $\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_m \end{pmatrix}$.

Δ ist wichtig weil div , grad sind beide wichtig (das wird noch im ...)

beide wichtig^u (das wird noch im
Lauf der HME geklärt)

$$\left. \begin{array}{l} \text{z.B. } \vec{E} = -\nabla V \\ \operatorname{div} \vec{E} = \rho \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \rho = \operatorname{div}(-\nabla V) = -\Delta V \\ \Rightarrow -\Delta V = \rho \end{array}$$

$$\boxed{\text{Bsp 2.18.4}} \quad f(x, y) = x^2 y + x e^y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + e^y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x e^y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x e^y.$$

$$\text{Also } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2y + x e^y.$$

2.19 Rechenregeln

Produktregeln (Folgerungen von

$$\partial_j (\phi \psi) = (\partial_j \phi) \cdot \psi + \phi (\partial_j \psi). \quad (**)$$

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfelder

und $\vec{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld (alle C^1).

Dann

$$\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$$

$$\underbrace{\nabla \cdot (f \vec{v})}_{\text{div}} = \underbrace{\nabla f \cdot \vec{v}}_{\text{grad} f} + f \underbrace{(\nabla \cdot \vec{v})}_{\text{div} \vec{v}} \quad (1)$$

$$\nabla \times (f \vec{v}) = f (\nabla \times \vec{v}) + \nabla f \times \vec{v}$$

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + f(\Delta g)$$

(vergleiche mit $(h_1, h_2)' = (h_1' h_2 + h_1 h_2)'$

$$= h_1'' h_2 + 2 h_1' h_2' + h_1 h_2'' \quad \text{aus HM1})$$

Herkunft: Hausaufgabe unter Verwendung von ~~(*)~~.

Bsp 2.19.1 Sei $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xz \\ yz \end{pmatrix}$

(Aus Bsp 2.18.3 wissen wir

$$\nabla \cdot \vec{v} = 2x + y \quad (2), \quad \text{und } f(x, y, z) = xyz.$$

Mit Hilfe von (1) berechnen Sie

$$\nabla \cdot (f \vec{v}).$$

$$\nabla \cdot (f \vec{v}) \stackrel{(1)}{=} \nabla f \cdot \vec{v} + f (\nabla \cdot \vec{v}) \quad \Rightarrow$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot (f \vec{v}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xz \\ yz \end{pmatrix} + \dots$$

$$\nabla \cdot (f \vec{v}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xz \\ yz \end{pmatrix} + xyz(zx+y)$$

$$= yz(x^2+y^2) + x^2 z^2 + xy^2 z + zx^2 yz + xy^2 z.$$

Hintereinanderausführung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfeld.
und $\vec{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld (beide $\mathcal{C}^1$).

Dann $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$
 $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0.$

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_2(\partial_3 f) - \partial_3(\partial_2 f) \\ \partial_3(\partial_1 f) - \partial_1(\partial_3 f) \\ \partial_1(\partial_2 f) - \partial_2(\partial_1 f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

weil $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ (Satz
von Schwarz).