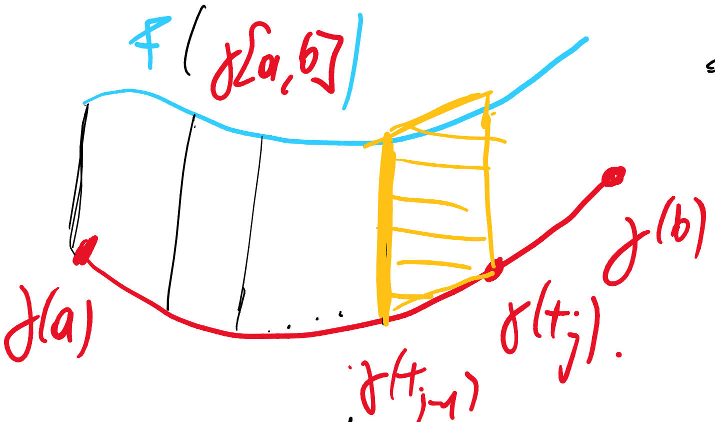
3.1 Kurvenintegrale von Skalarfeldern



Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $f : \underbrace{\gamma([a,b])}_{\text{Bild der Kurve}} \to \mathbb{R}$

Um den Flächeninhalt "unter dem Graphen von f (unter dem Graphen, für $f \geq 0$)" zu bestimmen zerlegen wir die Kurve und betrachten wir Summen der Art

$$I = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\underbrace{f(\gamma(t_{j-1}))}_{\text{Höhe des Rechteckes}} \underbrace{\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|}_{\text{Breite des Rechteckes}}}_{\text{Flächeninhalt}}$$

Summe der Flächeninhalte.

$$I \approx \sum_{j=1}^{n} f(\gamma(t_{j-1})) \, \|\gamma'(t_{j-1})\| \, (t_j - t_{j-1}) \longrightarrow \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

(weil $\underbrace{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}_{\text{Änderung des Ortes}} \approx \underbrace{\gamma'(t_{j-1})}_{\text{Geschwindigkeit}} \underbrace{(t_j - t_{j-1})}_{\text{Länge des Zeitintervalles}}$ (*)

wenn die Zerlegung fein wird

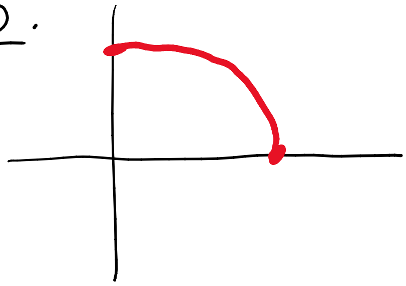
$(\max\{ |t_j - t_{j-1}| : j = 1, \dots, n\} \longrightarrow 0.)$.

Also <u>Def 3.1.1</u> Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig. Für eine reguläre Kurve $\gamma: [a,b] \to D$ (regulär bedeutet $\gamma \in C^1$ und $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ $\forall t \in [a,b]$) setzt man

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

<u>Bsp 3.1.1</u> Ein Draht liegt auf der Kurve $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\}$ und hat Dichte $f(x,y) = xy$. Bestimmen Sie die Masse des Drahtes.

<u>Lö:</u>



$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1.$$

Parametrisierung.

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \cos t \qquad y = \sin t, \quad \underbrace{t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]}_{\text{weil } x \geq 0,\, y \geq 0}.$$

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sin t)$$

Die Masse ist also

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{f(\gamma(t))}_{\substack{f(\sqrt{2}\cos t, \sin t) \\ = \sqrt{2}\cos t \sin t}} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\cos t \sin t$$

da $f(x,y) = xy$ $\Longrightarrow$

$$\|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\sqrt{2}\sin t)^2 + (\cos t)^2}$$

da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Longrightarrow$ $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+\sin^2 t}$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos t \sin t \sqrt{\underbrace{1+\sin^2 t}_{u}}\, dt \qquad \frac{du}{2}$$

$u = u(t) = 1 + \sin^2 t \Longrightarrow du = 2\sin t \cos t.$

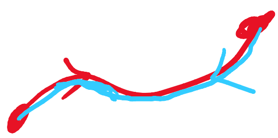
$$= \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} \sqrt{2}\, \frac{du}{2} \sqrt{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_{u=1}^{u=2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Bem 1: Ist γ geschlosse (d.h $\gamma(a) = \gamma(b)$ d.h "die Kurve aufhört wo sie angefangen hat") schreibt man auch $\int_\gamma f\, ds = \oint_\gamma f\, ds$

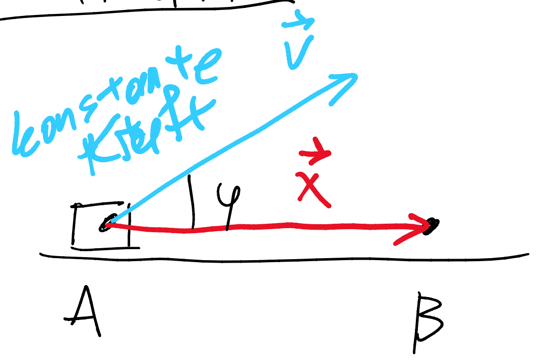
$\gamma(a) = \gamma(b)$

Bem 2: Es gilt $\int_\gamma f\, ds = \int_{-\gamma} f\, ds$, wobei $-\gamma$ wie die Kurve γ ist aber in umgekehrte Richtung durchläuft. (die Spuren von den Kurven sind gleich).



3.2 Kurvenintegrale von Vektorfeldern

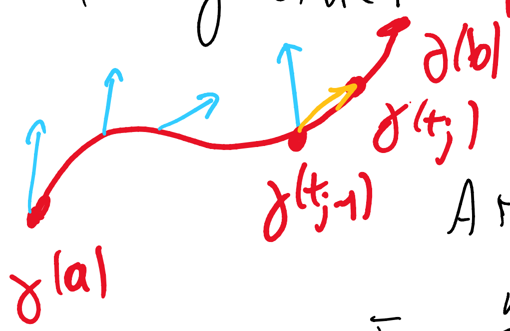
Motivation



$\vec{x} = \vec{AB}$ (Verschiebungsvektor Bewegung entlang der Strecke $\vec{AB}$)

$\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{x}}_{\|\vec{v}\| \, \|\vec{x}\| \cos\varphi}$ = Arbeit von $\vec{v}$

Was passiert wenn $\vec{v}$ nicht konstant ist, und wenn die Bewegung entlang einer Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist?



Wir approximieren die Arbeit mit Summen der Art

$$I = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\vec{v}(\gamma(t_{j-1}))}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))}_{\text{Approximation des durchlaufenen Weges}}$$

Skalarprodukt

Approximation der gesamten Arbeit.

Approximation der Arbeit zwischen $\gamma(t_{j-1})$ und $\gamma(t_j)$.

Aus $(*)$ $\rightsquigarrow$ $I \approx \sum_{j=1}^{n} \vec{v}(\gamma(t_{j-1})) \cdot \gamma'(t_{j-1}) \, (t_j - t_{j-1})$.

$$\longrightarrow \int_a^b \vec{v}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt.$$

wenn die Zerlegung fein wird
($\max\{|t_j - t_{j-1}| : j = 1,\dots,n\} \longrightarrow 0.$)

Def 3.2.1 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $\vec{v}: D \to \mathbb{R}^n$ stetig.
Für eine reguläre Kurve $\gamma: [a,b] \to D$
setzt man
$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

Bsp 3.2.1 $\gamma: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$

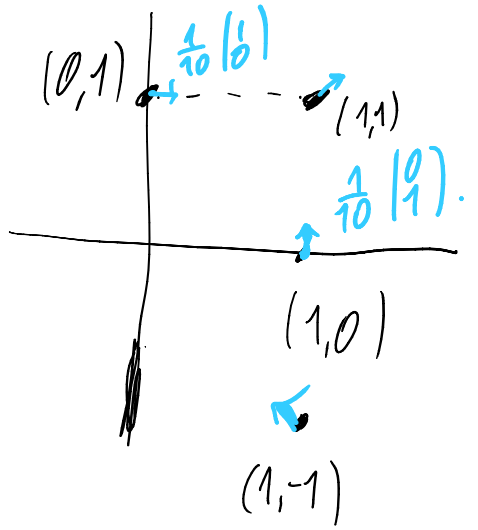
$\vec{v}(x,y) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$ $\qquad \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = ?$

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \underbrace{\vec{v}(\gamma(t))}_{\vec{v}(\cos t, \sin t) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}}\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1}{10}\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{1}{10} \underbrace{(\cos^2 t - \sin^2 t)}_{\cos 2t} \, dt.$$

$$= \frac{\sin 2t}{20}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) - \cancel{\sin(\pi)}^{\,0}}{20} = \frac{-1}{20} = -0.05.$$



$$v(x,y) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v}(1,0) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(1,1) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(0,1) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(1,-1) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

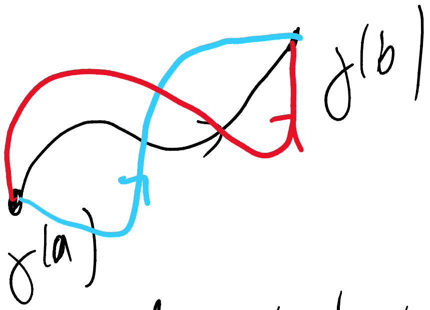
Bemerkung: $\int_{-\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$

Interpretation: Wenn die Richtung der Bewegung sich ändert, dann ändert sich das Vorzeichen der Arbeit der Kraft.

Satz 3.2.1: Ist $f: D \to \mathbb{R}$ ein C^1 Vektorfeld und $\gamma: [a,b] \to D$ eine reguläre Kurve dann

$$\int \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$$\int_\gamma \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$



Also hängt das Kurvenintegral nur vom Anfang $\gamma(a)$ und Ende $\gamma(b)$ der Kurve und nicht von dem ganzen Weg.

Insbesonder ist $\gamma(a) = \gamma(b)$ (geschlossene Kurve)

$$\oint_\gamma \nabla f \cdot d\vec{s} = 0.$$

<u>Beweis:</u> $\oint_\gamma \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \overset{\text{Skalarprodukt}}{\cdot} \gamma'(t)\, dt.$

$$= \int_a^b \underbrace{f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)}_{\text{Matrixprodukt}}\, dt. \overset{\text{Ketten}}{\underset{\text{regel}}{=}} \int_a^b \left(f(\gamma(t))\right)' dt$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)$

gilt weil. $f'(\gamma(t)) = \left(\nabla f(\gamma(t))\right)^T$