

## HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

### LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 1. ÜBUNGSBLATT

#### AUFGABE 1 (ÜBUNG)

Finden Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme auf einem möglichst großen Intervall.

a)  $y' = -\frac{1}{2x} \frac{y^2 - 6y + 5}{y - 3}$  mit  $y(1) = 2$ .

b)  $y' = e^{x-y-e^y}$  mit  $y(1) = 0$ .

#### Lösungsvorschlag

- a) Es ist  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{x}$  und  $g : (-\infty, 3) \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = \frac{y^2 - 6y + 5}{2y - 6}$ . Da  $g$  in 1 eine Nullstelle hat, ist  $\tilde{f} = (1, 3)$ . Nach Separation erhalten wir für  $x > 0$

$$\int_2^{y(x)} \frac{2s - 6}{s^2 - 6s + 5} ds = \int_1^x -\frac{1}{s} dx \iff \log -y^2 + 6y - 5 - \log 3 = -\log x + \log(1) = -\log x.$$

Nun wenden wir die Exponentialfunktion an. Dies führt zu

$$y^2 - 6y + 5 = -\frac{3}{x} \iff (y - 3)^2 = 4 - \frac{3}{x} \iff y(x) = 3 \pm \sqrt{4 - \frac{3}{x}}.$$

Das fehlende Vorzeichen wird durch  $y(1) = 2$  zu einem Minus und wir haben die Lösung

$$y(x) = 3 - \sqrt{4 - \frac{3}{x}} \quad \forall x > \frac{3}{4}$$

Dabei haben wir  $x$  auf den maximalen Definitionsbereich eingeschränkt, den diese Funktion hat. Es gilt dann  $y(x) \in (1, 3)$  und  $y(x) \rightarrow 3$  für  $x \rightarrow \frac{3}{4}$ , womit  $y$  nicht fortgesetzt werden kann.

- b) Es ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = e^{-y} e^{-e^y}$ ,  $\tilde{f} = \mathbb{R}$ .

$$\int_1^{y(x)} e^s e^{e^s} ds = \int_1^x e^s ds \iff e^{e^y} - e = e^x - e.$$

Daraus folgt

$$e^{e^{y(x)}} = e^x$$

und somit

$$y(x) = \log(\log e^x) = \log(x) \quad \forall x > 0$$

Wegen  $y(x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow 0$  ist diese Lösung nicht fortsetzbar.

## AUFGABE 2 (TUTORIUM)

Finden Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme auf einem möglichst großen Intervall.

- a)  $y' = xe^{-x}y^2$  mit  $y(0) = 1$ .
- b)  $y' = e^y \sin(x)$  mit  $y(0) = -\log(3)$ .
- c)  $y' = -\frac{x^2}{y^3}$  mit  $y(0) = \sqrt{2}$ .

### Lösungsvorschlag

- a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation der Vorlesung sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $J = (0, \infty)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto xe^{-x}$ , und  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y \mapsto y^2$ . Eine Stammfunktion von  $f$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^x f(s) \, ds = \int_0^x se^{-s} \, ds \\ &\stackrel{P.I.}{=} [-se^{-s}]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x e^{-s} \, ds = [-se^{-s} - e^{-s}]_{s=0}^{s=x} = 1 - (1+x)e^{-x} \end{aligned}$$

für alle  $x \in I$ . Eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$  ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} \, ds = \int_1^y \frac{1}{s^2} \, ds = 1 - \frac{1}{y}.$$

Nach Satz 12.2 ergibt sich die Lösung  $y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  nun durch Auflösen der Gleichung  $G(y(x)) = F(x)$  nach  $y(x)$ , also

$$y(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

Dabei ist das Intervall  $I_{x_0}$  das größte Teilintervall von  $I$  mit  $y_0 \in I_{x_0}$ , auf dem  $y$  definiert ist und  $y(I_{x_0}) \subseteq J = (0, \infty)$ , also  $I_{x_0} = (-1, \infty)$ . Da  $y$  in  $-1$  nicht stetig fortsetzbar ist, ist dies das maximale Existenzintervall.

- b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation aus Abschnitt 1.1, sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $J = \mathbb{R}$ ,  $f = \sin$  und  $g = \exp$ . Eine Stammfunktion von  $f$  ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(s) \, ds = \int_0^x \sin(s) \, ds = 1 - \cos(x).$$

Eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$  ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} \, ds = \int_{-\log(3)}^y e^{-s} \, ds = 3 - e^{-y}.$$

Nach Abschnitt 1.1 ergibt sich die Lösung  $y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  nun durch Auflösen der Gleichung  $G(y(x)) = F(x)$  nach  $y(x)$ , also

$$y(x) = -\log(2 + \cos(x)).$$

Dabei ist das Intervall  $I_{x_0}$  das größte Teilintervall von  $I$  mit  $y_0 \in I_{x_0}$ , auf dem  $y$  definiert ist, also  $I_{x_0} = \mathbb{R}$ , was automatisch das maximale Existenzintervall ist.

- c) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation der Vorlesung sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto -x^2$  und  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y \mapsto \frac{1}{y^3}$ . Wegen  $u_0 = \sqrt{2}$  bietet es sich an,  $J = \mathbb{R}^+$  zu wählen (das größte Intervall, welches  $y_0$  enthält und auf dem  $g$  das Vorzeichen von  $g(u_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$  hat). Eine Stammfunktion von  $f$  ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(s) \, ds = \int_0^x -s^2 \, ds = -\frac{x^3}{3}.$$

Eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$  ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} \, ds = \int_{\sqrt{2}}^y y^3 \, ds = \frac{y^4}{4} - 1$$

Nach Abschnitt 1.1 ergibt sich die Lösung  $y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  nun durch Auflösen der Gleichung  $G(y(x)) = F(x)$  nach  $y(x)$ , also

$$y(x) = \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{1 - \frac{x^3}{3}},$$

wobei das Vorzeichen von  $y$  durch  $y_0 = \sqrt{2}$  festgelegt ist. Dabei ist das Intervall  $I_{x_0}$  das größte Teilintervall von  $I$  mit  $y_0 \in I_{x_0}$ , auf dem  $y$  definiert ist, also  $I_{x_0} = (-\infty, \sqrt[3]{3})$ . Da  $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{3}} y(x) = 0$  und 0 nicht im Definitionsbereich von  $g$  liegt, haben wir das maximale Existenzintervall gefunden.

### AUFGABE 3 (ÜBUNG)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y, & t &\in [0, T] \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

zu zeigen. Dabei sei  $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Mit  $A : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen wir eine Stammfunktion von  $a$  auf  $[0, T]$ .

- a) Zeigen Sie, dass durch  $\phi(t) := e^{A(t)-A(0)} y_0$  für  $t \in [0, T]$  eine Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist.
- b) Sei  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Lösung des Anfangswertproblems. Für festes  $t \in (0, T]$  sei  $z : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$z(s) := e^{A(t)-A(s)} \psi(s).$$

- (i) Zeigen Sie  $z(0) = \phi(t)$  sowie  $z(t) = \psi(t)$  und berechnen Sie  $z'(s)$  für  $s \in [0, t]$ .
- (ii) Folgern Sie  $\psi(t) = \phi(t)$  für alle  $t \in [0, T]$ , womit die Eindeutigkeit von  $\phi$  als Lösung des Anfangswertproblems gezeigt ist.

### Lösungsvorschlag

- a) Wir berechnen die Ableitung der Funktion  $\phi$  und sehen (Kettenregel)

$$\phi'(t) = e^{A(t)-A(0)} A'(t) y_0 = e^{A(t)-A(0)} a(t) y_0 = a(t) \phi(t).$$

Außerdem gilt  $\phi(0) = e^{A(0)-A(0)}y_0 = y_0$ , womit  $\phi$  eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

b) (i) Für festes  $t$  gilt

$$z(0) = e^{A(t)-A(0)}\psi(0) = e^{A(t)-A(0)}y_0 = \phi(t), \quad z(t) = e^{A(t)-A(t)}\psi(t) = \psi(t).$$

Außerdem gilt für die Ableitung  $z'$  (Produkt- und Kettenregel)

$$z'(s) = e^{A(t)-A(s)}(-A'(s))\psi(s) + e^{A(t)-A(s)}\psi'(s) = -e^{A(t)-A(s)}a(s)\psi(s) = e^{A(t)-A(s)}a(s)\psi(s) = 0,$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\psi$  eine Lösung des Anfangswertproblems ist, also  $\psi'(s) = a(s)\psi(s)$  und  $\psi(0) = y_0$ .

(ii) Es gilt

$$0 = \int_0^t 0 \, ds = \int_0^t z'(s) \, ds = z(t) - z(0) = \psi(t) - \phi(t),$$

also  $\psi(t) = \phi(t)$ . Da  $t \in [0, T]$  beliebig war, folgt die Gleichheit der beiden Funktionen. Eine beliebige Lösung ist demnach immer gleich der von uns vorgegebenen Lösung, womit diese eindeutig ist.

#### AUFGABE 4 (TUTORIUM)

Finden Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme auf einem möglichst großen Intervall.

a)  $y' = \frac{1}{1-t}y + t - 1$  mit  $y(0) = 0$ .

b)  $y' = -\frac{3}{t}y + \frac{1}{t^3+t}$  mit  $y(1) = 1$ .

c)  $y' = 2ty + t^3$  mit  $y(0) = \frac{1}{2}$ .

d)  $y' = \frac{t^2-4ty}{1+t^2}$  mit  $y(0) = 1$ .

#### Lösungsvorschlag

a) Die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung  $y' = \frac{1}{1-t}y$  ist gegeben durch

$$y_h(t) = c \exp(-\log(t-1)) = c \frac{1}{t-1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung für die inhomogene Differentialgleichung bekommen wir mit Variation der Konstanten: Setzen wir den Ansatz  $y(t) = c(t)\frac{1}{t-1}$  in die Differentialgleichung ein, erhalten wir  $c'(t) = (t-1)^2$ , also  $c(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3$ . Eine spezielle Lösung ist damit gegeben durch  $y_p = \frac{1}{3}(t-1)^2$ . Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c \frac{1}{t-1} + \frac{1}{3}(t-1)^2, \quad \text{für } t \neq 1, c \in \mathbb{R}.$$

Wegen  $y(0) = -c + \frac{1}{3} = 0$  genau für  $c = \frac{1}{3}$  ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{3(t-1)} + \frac{(t-1)^2}{3}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

- b) Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung  $y' = -\frac{3}{t}y$  lautet

$$y_h(t) = c \exp(-3 \log(t)) = c \frac{1}{t^3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Der Ansatz für die Variation der Konstanten lautet also  $y(t) = c(t) \frac{1}{t^3}$ . Wir setzen den Ansatz in die Differentialgleichung ein und erhalten  $c'(t) = 1 - \frac{1}{t^2+1}$ . Also ist  $c(t) = t - \arctan(t)$  und damit  $y_p(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \arctan(t)$  eine spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \arctan(t), \quad \text{für } t \neq 0, c \in \mathbb{R}.$$

Wegen  $y(1) = c + 1 - \arctan(1) = 1$  genau für  $c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$  ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(t) = \frac{\pi}{4t^3} + \frac{1}{t^2} - \frac{\arctan(t)}{t^3}, \quad t \in (0, \infty).$$

- c) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation aus Abschnitt 1.2 sei  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto 2t$  und  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto t^3$ . Es gilt

$$A(t) := \int_{t_0}^t a(s) \, ds = \int_0^t 2s \, ds = \left[ s^2 \right]_{s=0}^{s=t} = t^2$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) \, ds &= \int_0^t s^3 e^{-s^2} \, ds = -\frac{1}{2} \int_0^t s^2 \cdot (-2s) e^{-s^2} \, ds \stackrel{P.I.}{=} -\frac{1}{2} \left[ s^2 e^{-s^2} \right]_{s=0}^{s=t} - \frac{1}{2} \int_0^t (-2s) e^{-s^2} \, ds \\ &= -\frac{1}{2} t^2 e^{-t^2} - \frac{1}{2} \left[ e^{-s^2} \right]_{s=0}^{s=t} = \frac{1}{2} - \frac{(1+t^2)e^{-t^2}}{2} \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Nach Abschnitt 1.2 der Vorlesung ist  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y(t) = y_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) \, ds = e^{t^2} - \frac{1+t^2}{2}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Lösung des Anfangswertproblems.

- d) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. In der Notation aus Abschnitt 1.2 sei  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto -\frac{4t}{1+t^2}$  und  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^2}$ . Es gilt

$$A(t) := \int_{t_0}^t a(s) \, ds = - \int_0^t \frac{4s}{1+s^2} \, ds = -2 \left[ \log(1+s^2) \right]_{s=0}^{s=t} = -2 \log(1+t^2) = \log \left( \frac{1}{(1+t^2)^2} \right)$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) \, ds &= \int_0^t e^{-\log\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right)} \frac{s^2}{1+s^2} \, ds = \int_0^t (1+s^2)^2 \frac{s^2}{1+s^2} \, ds = \int_0^t s^2 + s^4 \, ds \\ &= \left[ \frac{s^3}{3} + \frac{s^5}{5} \right]_{s=0}^{s=t} = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \end{aligned}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Nach Abschnitt 1.2 der Vorlesung ist  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y(t) = y_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) \, ds = \frac{1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}}{(1+t^2)^2}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Lösung des Anfangswertproblems.

### AUFGABE 5 (ÜBUNG/TUTORIUM)

Bei der Bewegung eines Körpers in Luft tritt bekannterweise ein Luftwiderstand auf. Aus der Strömungsmechanik wissen wir, dass die Luftwiderstandskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist und durch die Formel

$$F_W = -\frac{1}{2} c_W \rho A v^2$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet  $c_W$  den Strömungswiderstandskoeffizienten,  $\rho$  die Dichte der Luft und  $A$  die projektive Querschnittsfläche des bewegten Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung. Der Strömungswiderstandskoeffizient  $c_W$  ist eine dimensionslose Größe, die abhängig von der Gestalt des Körpers ist und experimentell bestimmt werden muss.

Stellen Sie Differentialgleichungen für die Geschwindigkeit  $v$  auf, welche die Bewegung

- a) in horizontaler Richtung
- b) in vertikaler Richtung

unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes beschreiben und berechnen Sie jeweils die Lösung für die Anfangsbedingung  $v(0) = v_0$ . Gehen Sie in beiden Fällen davon aus, dass  $c_W$ ,  $\rho$  und  $A$  konstant sind und keine weiteren äußeren Kräfte den Körper beeinflussen außer der Gewichtskraft und der Luftwiderstandskraft.

### Lösungsvorschlag

Im Folgenden sei stets  $k := \frac{1}{2} c_W \rho A$ .

- a) In horizontaler Richtung wirkt auf den Körper nur die Luftwiderstandskraft, die damit der resultierenden Gesamtkraft entspricht. Damit gilt

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_W \\ \iff ma &= -kv^2 \\ \iff v' &= -\frac{k}{m}v^2. \end{aligned}$$

Mittels Trennung der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{1}{v^2} \, dv = -\frac{k}{m}t + c \quad \text{also} \quad v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t - c}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und mit  $v(0) = v_0$  schließlich

$$v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}}.$$

Insbesondere ist  $v \equiv 0$ , falls  $v_0 = 0$ .

- b) Im Gegensatz zur Bewegung in horizontaler Richtung wirkt hier neben  $F_W$  auch die Gewichtskraft  $F_g$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_W + F_g \\ \Leftrightarrow ma &= -kv^2 + mg \\ \Leftrightarrow v' &= -\frac{k}{m}v^2 + g. \end{aligned}$$

Dies ist eine Riccatische Differentialgleichung. Um diese zu lösen, benötigen wir zunächst eine spezielle Lösung dieser Gleichung. Durch Umformen der Gleichung für  $v$  finden wir

$$v' = -\frac{k}{m}\left(v^2 - \frac{m}{k}g\right).$$

Nehmen wir versuchsweise an, dass  $v$  konstant ist, erkennen wir, dass  $v_\infty := \sqrt{\frac{mg}{k}}$  eine (konstante) Lösung der Gleichung ist. Anschaulich ist dies die Geschwindigkeit, bei der sich Luftreibung und Erdanziehungskraft gegenseitig kompensieren und der Körper mit konstanter Geschwindigkeit fällt.

Der Ansatz  $u := v - v_\infty$  führt uns auf die Bernoullische Differentialgleichung

$$u' = -2\frac{k}{m}v_\infty u - \frac{k}{m}u^2.$$

Durch eine erneute Substitution  $z := u^{-1}$  erhalten wir die lineare Differentialgleichung

$$z' = 2\frac{k}{m}v_\infty z + \frac{k}{m}.$$

Für eine *lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*, d.h.  $y' = ay + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$  kann man leicht nachrechnen, dass  $y(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , die Lösung dieser Gleichung ist.

Daher ist  $z(t) = z_0 \exp(2\frac{k}{m}v_\infty t) - \frac{1}{2v_\infty}$ ,  $z_0 \in \mathbb{R}$ , die Lösung der Gleichung für  $z$ . Durch Rücksubstitution erhalten wir

$$v(t) = v_\infty - \frac{2v_\infty}{c_0 \exp(2\frac{k}{m}v_\infty t) + 1}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung  $v(0) = v_0$  führt schließlich auf  $c_0 = \frac{v_\infty + v_0}{v_\infty - v_0}$  und somit auf die Lösung

$$v(t) = v_\infty - \frac{2v_\infty(v_\infty - v_0)}{(v_\infty + v_0)\exp(2\frac{k}{m}v_\infty t) + v_\infty - v_0}.$$