

HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG
ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 2. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 6 (ÜBUNG)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{2x} + \frac{y^\alpha}{2}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$.

- a) Lösen Sie für $\alpha = -1$ die Anfangswertprobleme mit $y(2) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- b) Lösen Sie für $\alpha = -2$ die Anfangswertprobleme mit $y(1) = \pm 1$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Die Koeffizientenfunktionen sind stetig auf $(0, \infty)$ (wir wählen das Intervall, in dem unser Anfangspunkt liegt). Wir multiplizieren unsere Gleichung mit $2y$ und definiere $z = y^2$. Somit folgt

$$z' = 2yy' = \frac{y^2}{x} + 1 = \frac{z}{x} + 1.$$

Der Anfangswert transformiert sich zu $z(2) = (y(2))^2 = \frac{3}{2}$. Zur Lösung dieses Anfangswertproblems berechnen wir

$$A(x) = \int_2^x \frac{1}{t} dt = \log(x) - \log(2) = \log\left(\frac{x}{2}\right)$$

und

$$\int_2^x \frac{2}{t} dt = 2\log(x) - 2\log(2) = 2\log\left(\frac{x}{2}\right).$$

Somit ist z gegeben durch

$$z(x) = \frac{3x}{4} + x\log\left(\frac{x}{2}\right).$$

Die Rücktransformation liefert

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{3x}{4} + x\log\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Wenn wir nun den Anfangswert einsetzen, sehen wir, dass für $y(2) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ die Lösung

$$y(x) = \sqrt{\frac{3x}{4} + x\log\left(\frac{x}{2}\right)}$$

und für $y(2) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$y(x) = -\sqrt{\frac{3x}{4} + x \log\left(\frac{x}{2}\right)}$$

lautet für $x > 2e^{-\frac{3}{4}}$, da der Ausdruck in der Wurzel nur dann positiv ist.

- b) Die Koeffizientenfunktionen sind stetig auf $(0, \infty)$ (wir wählen das Intervall, in dem unser Anfangspunkt liegt). Nun multiplizieren wir mit $3y^2$ und definieren $z = y^3$. Es folgt

$$z' = 3y^2 y' = \frac{3y^2}{2x} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2x} z + \frac{3}{2}$$

Der Anfangswert wird zu $z(1) = (y(1))^3 = \pm 1$. Durch die unterschiedlichen Anfangswerte lösen wir die lineare Gleichung für z ohne Anfangswert. Es folgt

$$A(x) = \int \frac{3}{2x} dx = \frac{3}{2} \log(x) + C = \log(x^{\frac{3}{2}}) + C$$

und daher

$$z(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} \frac{3}{2} dx = x^{\frac{3}{2}} \int \frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx = x^{\frac{3}{2}} \cdot ((-3x^{-\frac{1}{2}}) + C) = Cx^{\frac{3}{2}} - 3x$$

Für $y(1) = z(1) = 1$ folgt die Lösung

$$z(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 3x$$

und somit

$$y(x) = \sqrt[3]{4x^{\frac{3}{2}} - 3x}$$

für alle $x > \frac{9}{16}$ (da nur dort der Ausdruck in der Wurzel positiv ist).

Für $y(1) = z(1) = -1$ folgt die Lösung

$$z(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 3x$$

und somit

$$y(x) = -\sqrt[3]{3x - 2x^{\frac{3}{2}}}$$

für alle $0 < x < \frac{9}{4}$ (da nur dort der Ausdruck in der Wurzel positiv ist). Das Vorzeichen resultiert aus dem Anfangswert von y .

AUFGABE 7 (TUTORIUM)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme bzw. geben Sie bei c) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an:

- a) $y' = x(y + y^2)$ mit $y(0) = 1$.
- b) $y^3 - \frac{1}{3x^2+3} + xy^2 y' = 0$ mit $y(1) = 1$.
- c) $y' + y - y^3 = 0$ mit $y(0) = \frac{1}{2}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = 2$). Wegen $y(0) = 1$, interessieren wir uns zunächst für Lösungen $y > 0$. Für solche darf man die Differentialgleichung durch $-y^2(x)$ dividieren und erhält die äquivalente Gleichung

$$-\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -x \left(\frac{1}{y(x)} + 1 \right).$$

Definiere $z(x) = \frac{1}{y(x)}$. Wegen $y > 0$ ist z definiert und differenzierbar mit $z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$. Die obige Gleichung lautet dann

$$z' = -x(z + 1).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für z . Eine partikuläre Lösung $z_p(x) = -1$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung z_h der homogenen Gleichung ist durch

$$z_h(x) = C e^{-\frac{x^2}{2}}$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $z(x) = z_p(x) + z_h(x) = -1 + C e^{-\frac{x^2}{2}}$. Durch die Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1$ wird $C = 2$ festgelegt. Es gilt

$$z(x) > 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} > -\log(2) \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2\log(2)} := x_0.$$

Also ist die Lösung y der ursprünglichen Gleichung zumindest auf dem Intervall $I = (-x_0, x_0)$ existent und eindeutig durch

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{2e^{-\frac{x^2}{2}} - 1}$$

für alle $x \in I$ gegeben. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow -x_0+} y(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} y(x) = \infty$$

ist sie weder nach links noch nach rechts weiter fortsetzbar.

- b) Wir teilen die Gleichung durch $xy(x)^2$ und erhalten

$$y'(x) = -\frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{3x^3 + 3x}y(x)^{-2},$$

also eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = -2$. Setzen wir $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^3$, so finden wir die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = -\frac{3}{x}z(x) + \frac{1}{x^3 + x}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nach Aufgabe 4 d) gegeben durch $z(x) = c \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \arctan(x)$. Nach Resubstitution erhalten wir

$$y(x) = \left(c \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \arctan(x) \right)^{1/3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ liefert $c = \frac{\pi}{4}$. Damit ist schließlich

$$y(x) = \left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \arctan(x) \right)^{1/3}, \quad \text{für } x > 0,$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

- c) Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 3$. Wir setzen daher $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^{-2}$. Dann erhalten wir für z die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = 2z(x) - 2.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $z'(x) = 2z(x)$ ist gegeben durch $z(x) = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$. Durch Variation der Konstanten c lässt sich nun eine spezielle Lösung ermitteln. Wir machen den Ansatz $z(x) = c(x)e^{2x}$ und setzen ihn in die inhomogene Differentialgleichung ein. Damit erhalten wir $c'(x) = -2e^{-2x}$, also $c(x) = e^{-2x}$ und somit $z_p(x) = 1$. Also erhalten wir als allgemeine Lösung

$$z(x) = 1 + ce^{2x} \quad \text{bzw.} \quad y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{2x}}}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$ impliziert $c = 3$. Somit ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3e^{2x}}}$ die gesuchte Lösung.

AUFGABE 8 (ÜBUNG)

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = e^{-x}y^2 + y - e^x.$$

Hinweis: Eine erste Lösung ist gegeben durch $u(x) = e^{ax}$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Zunächst bestimmen wir eine spezielle Lösung der Gleichung mit dem gegebenen Ansatz $y_0(x) = e^{ax}$. Einsetzen liefert

$$(a-1)e^{ax} = e^{(2a-1)x} - e^x,$$

und für $a = 1$ gilt Gleichheit. Somit ist $y_0(x) = e^x$ eine Lösung der Gleichung.

Die weiteren Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung bekommen wir nun mit dem Ansatz $u := y - y_0 = y - e^x$. Dieser liefert für die Funktion u die Gleichung

$$u'(x) = (1 + 2y_0(x)e^{-x})u(x) + e^{-x}u(x)^2 \quad \text{also} \quad u'(x) = 3u(x) + e^{-x}u(x)^2.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir $z(x) := u(x)^{1-\alpha} = u(x)^{-1}$ substituieren. Dies führt auf

$$z'(x) = -3z(x) - e^{-x}.$$

Die homogene Gleichung $z'(x) = -3z(x)$ hat die allgemeine Lösung $z_h(x) = ce^{-3x}$, $c \in \mathbb{R}$, und mittels Variation der Konstanten erhalten wir $z_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der Gleichung für z ist damit

$$z(x) = ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nun ermitteln wir die Nullstellen von z . Aus $z(\xi) = 0$ folgt $e^{2\xi} = 2c$. Für $c \leq 0$ hat z also keine Nullstelle, für $c > 0$ ist $\xi = \frac{\log(2c)}{2}$ die einzige Nullstelle von z . Für jedes $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir also durch

$$u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}}$$

eine Lösung von $u' = 3u + e^{-x}u^2$, wobei $x \in \mathbb{R}$ falls $c \leq 0$ und $x \in (-\infty, \frac{\log(2c)}{2})$ oder $x \in (\frac{\log(2c)}{2}, \infty)$ falls $c > 0$ gilt. Zusammen mit $u \equiv 0$ sind dies alle Lösungen von $u' = 3u + e^{-x}u^2$.

Für die ursprüngliche Gleichung haben wir also die Lösungen

$$y_0(x) = e^x \quad \text{und} \quad y(x) = e^x + \frac{2}{2ce^{-3x} - e^{-x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

auf den entsprechenden Intervallen $\mathbb{R}$ oder $(-\infty, \frac{\log(2c)}{2})$ bzw. $(\frac{\log(2c)}{2}, \infty)$ je nach Wahl von c .

AUFGABE 9 (TUTORIUM)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' = y^2 - (2x+1)y + 1 + x + x^2$ mit $y(0) = \frac{1}{3}$.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = ax$, um eine Lösung der Differentialgleichung zu erhalten.

b) $y' + (1-4x)y + 2xy^2 = 1 - 2x$ mit $y(0) = \frac{3}{2}$.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = a$, um eine Lösung der Differentialgleichung zu erhalten.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Riccatische Differentialgleichung. Setzen wir den Ansatz ein, so ergibt sich

$$a = a^2x^2 - (2x+1)ax + 1 + x + x^2 = (1-a)^2x^2 + (1-a)x + 1,$$

also ist für $a = 1$ eine spezielle Lösung y_p durch

$$y_p(x) = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Setze $z = y - y_p$. Dann erfüllt y genau dann die Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x) - y_p'(x) \\ &= y^2(x) - y_p^2(x) - (2x+1)(y(x) - y_p(x)) \\ &= (y(x) - y_p(x))(y(x) + y_p(x)) - (2x+1)z(x) \\ &= z(x)(z(x) + 2y_p(x)) - (2x+1)z(x) \\ &= z^2(x) - z(x) \end{aligned}$$

erfüllt. Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung. Für den Anfangswert gilt

$$z(0) = y(0) - y_p(0) = \frac{1}{3} > 0.$$

Deswegen interessieren wir uns zunächst für Lösungen $z > 0$. Für solche darf man die Differentialgleichung für z durch $z^2(x)$ dividieren und erhält die äquivalente Gleichung

$$\frac{z'(x)}{z^2(x)} = 1 - \frac{1}{z(x)}.$$

Definiere $w(x) = \frac{1}{z(x)}$. Wegen $z > 0$ ist w differenzierbar mit $w'(x) = -\frac{z'(x)}{z^2(x)}$. Die obige Differentialgleichung lautet dann

$$-w'(x) = 1 - w(x).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für w . Eine partikuläre Lösung $w_p = 1$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung w_h der homogenen Gleichung ist durch

$$w_h(x) = Ce^x$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $w(x) = w_h(x) + w_p(x) = 1 + Ce^x$. Durch die Anfangsbedingung $w(0) = \frac{1}{z(0)} = 3$ wird $C = 2$ festgelegt. Damit ist $w(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$z(x) = \frac{1}{w(x)} = \frac{1}{1 + 2e^x}, \quad \text{bzw.} \quad y(x) = y_p(x) + z(x) = x + \frac{1}{1 + 2e^x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das obige y ist die eindeutige, nicht weiter fortsetzbare Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

- b) Es handelt sich wieder um eine Riccatische Differentialgleichung. Setzen wir den Ansatz ein, so erhalten wir

$$a - 2a(2 - a)x = 0 + (1 - 4x)a + 2xa^2 = 1 - 2x,$$

womit eine erste Lösung durch $\phi(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Setzen wir $u = y - \phi$, so erfüllt u die Differentialgleichung

$$u' + u + 2xu^2 = u' + ((1 - 4x) + 2 \cdot 2x)u + 2xu^2 = 0.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung (mit $\alpha = 2$). Der Anfangswert ergibt sich zu

$$u(0) = y(0) - \phi(0) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0,$$

womit wir uns für positive Lösungen interessieren. Dividieren durch $-y^2$ und die Substitution $z = u^{-1}$ liefern für z die Differentialgleichung

$$z' = z + 2x.$$

Der Anfangswert ergibt sich hierbei zu $z(0) = (y(0))^{-1} = 2$. Für diese lineare Differentialgleichung erster Ordnung gilt

$$A(x) = \int_0^x a(t) dt = \int_0^x 1 dt = x$$

und

$$\int_0^x e^{-A(t)} b(t) dt = 2 \int_0^x e^{-t} t dt \stackrel{\text{P.I.}}{=} 2[-te^{-t}]_0^x + 2 \int_0^x e^{-t} dt = -2[(t+1)e^{-t}]_0^x = 2 - 2(x+1)e^{-x}.$$

Die Lösung des inhomogenen Problems ist deshalb

$$z(x) = 2e^{A(x)} + e^{-A(x)} \int_0^x e^{-A(t)} b(t) dt = 2e^x + 2e^x - 2(x+1) = 4e^x - 2(x+1).$$

Resubstitution liefert

$$u(x) = \frac{1}{4e^x - 2(x+1)}$$

und schließlich

$$y(x) = \frac{1}{4e^x - 2(x+1)} + 1.$$

AUFGABE 10 (ÜBUNG)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x^2+1)e^x.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = e^{ax}$ für eine Lösung der homogenen Gleichung.

b) Bestimmen Sie eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, welche

$$\{y_1(x) = e^x, y_2(x) = \cos(2x)\}$$

als Fundamentalsystem besitzt.

Hinweis: Benutzen Sie die Wronski-Determinante.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Durch Einsetzen des Ansatzes in die homogene Gleichung sieht man leicht, dass die Gleichung für $a = 1$ erfüllt ist und somit $u(x) = e^x$ eine Lösung ist. Nun können wir das Reduktionsverfahren von d'Alembert anwenden, um die allgemeine Lösung zu finden. Der Ansatz $y(x) = w(x)u(x)$ führt auf

$$\begin{aligned} xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y &= x(w''u + 2w'u' + wu'') - (2x+1)(w'u + wu') + (x+1)uw \\ &= xe^x w'' - e^x w' \stackrel{!}{=} (x^2+1)e^x. \end{aligned}$$

D.h. $v := w'$ erfüllt die Gleichung $v' = \frac{1}{x}v + x + \frac{1}{x}$. Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist $v_{\text{hom}}(x) = c \exp\left(\int 1/x dx\right) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung erhalten wir nun mittels Variation der Konstanten, d.h. wir machen den Ansatz $y(x) = c(x)x$. Einsetzen liefert

$$c'(x)x = x + \frac{1}{x} \iff c'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \iff c(x) = x - \frac{1}{x} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

D.h. $v_p(x) = (x - \frac{1}{x})x = x^2 - 1$ ist eine spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v ist somit gegeben durch

$$v(x) = x^2 - 1 + cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für w erhalten wir damit $w(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + c_1x^2 + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, und als allgemeine Lösung schließlich

$$y(x) = w(x)u(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)e^x + c_1x^2e^x + c_2e^x, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- b) Wir suchen zwei Funktionen p und q , sodass y_1 und y_2 die homogene lineare Differentialgleichung $y'' + py' + qy = 0$ lösen. Dann erfüllt die Wronski-Determinante

$$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} w'(x) &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)(-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)) - y_2(x)(-p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)) \\ &= -p(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) \\ &= -p(x)w(x). \end{aligned}$$

Für $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = \cos(2x)$ gilt dann

$$\begin{aligned} w(x) &= -2e^x \sin(2x) - e^x \cos(2x), \\ w'(x) &= -5e^x \cos(2x). \end{aligned}$$

Dies führt auf

$$p(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)} = -\frac{5 \cos(2x)}{\cos(2x) + 2 \sin(2x)}.$$

Setzen wir y_1 in die Gleichung ein, so erhalten wir für q

$$e^x + p(x)e^x + q(x)e^x = 0 \iff q(x) = -1 - p(x) = \frac{4 \cos(2x) - 2 \sin(2x)}{\cos(2x) + 2 \sin(2x)}.$$

Als Differentialgleichung erhalten wir schließlich

$$(\cos(2x) + 2 \sin(2x))y'' - 5 \cos(2x)y' + (4 \cos(2x) - 2 \sin(2x))y = 0.$$

AUFGABE 11 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Finden Sie in **b)** danach noch die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $y''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y'(x) - \frac{2}{1-x^2}y(x) = 0$ für $0 < x < 1$.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = ax$ für eine Lösung der homogenen Gleichung.

b) $y''(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)y'(x) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)y(x) = 2e^{2x}$ für $x > 0$, $y(1) = y'(1) = -e^2$.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = e^{ax}$ für eine Lösung der homogenen Gleichung.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Man erkennt, dass $u(x) = x$ eine Lösung ist.

Um die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz (Verfahren von d'Alembert) $y(x) = v(x)u(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
 y''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y'(x) - \frac{2}{1-x^2}y(x) &= v''(x)u(x) + 2v'(x)u'(x) + v(x)u''(x) + \\
 &\quad \frac{2x}{1-x^2}(v'(x)u(x) + v(x)u'(x)) - \\
 &\quad \frac{2}{1-x^2}v(x)u(x) \\
 &= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) + \frac{2x}{1-x^2}u(x)\right] + \\
 &\quad v(x)\underbrace{\left[\frac{2}{1-x^2} - \frac{2x}{1-x^2}u'(x)\right]}_{=0} \\
 &= 0 \\
 \Leftrightarrow^{x>0} v''(x) + 2v'(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}\right) &= 0
 \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v' . Es gilt

$$\int \frac{2}{x} dx = 2\log(x) \text{ und } \int \frac{2x}{1-x^2} dx = -\log(1-x^2)$$

auf $I = (0, 1)$. Damit ist $v'(x) = C \frac{1-x^2}{x^2} = C\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v' . Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = C_1\left(\frac{1}{x} + x\right) + C_2$$

als allgemeine Lösung für v . Damit ist $y(x) = C_1(1+x^2) + C_2x$ für alle $0 < x < 1$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

- b)** Wir machen zunächst einen Ansatz, um eine nichttriviale Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung zu finden:

$$u(x) = e^{\lambda x}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
 u''(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)u'(x) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)u(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} - \left(4 + \frac{2}{x}\right)\lambda e^{\lambda x} + \left(4 + \frac{4}{x}\right)e^{\lambda x} \\
 &= e^{\lambda x} \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{1}{x}(4 - 2\lambda) \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 + 2\frac{2-\lambda}{x} &= (2-\lambda)\left(2 - \lambda + \frac{2}{x}\right) = 0 \\
 \Leftrightarrow 2 &= \lambda
 \end{aligned}$$

Also ist $u(x) = e^{2x}$ eine partikuläre Lösung der obigen Differentialgleichung.

Um die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz (Verfahren von d'Alembert) $y(x) = v(x)u(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
 y''(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)y'(x) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)y(x) &= v''(x)u(x) + 2v'(x)u'(x) + v(x)u''(x) - \\
 &\quad \left(4 + \frac{2}{x}\right)(v(x)u'(x) + v'(x)u(x)) + \\
 &\quad \left(4 + \frac{4}{x}\right)v(x)u(x) \\
 &= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)u(x)\right] + \\
 &\quad v(x)\underbrace{\left[u''(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)u'(x) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)u(x)\right]}_{=0} \\
 &= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) + \left(4 - \frac{2}{x}\right)u(x)\right] \stackrel{!}{=} 2e^{2x} \\
 \Leftrightarrow^{u(x)>0} v''(x) + v'(x)\left[\underbrace{\frac{2u'(x)}{u(x)}}_{=4} - \left(4 + \frac{2}{x}\right)\right] &= v''(x) - \frac{2}{x}v'(x) \stackrel{!}{=} 2
 \end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v' . Es gilt

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \log(x), \quad \text{sowie} \quad \int \frac{1}{x^2} 2 dx = -\frac{2}{x}.$$

Also ist

$$v'(x) = Cx^2 - 2x$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v' . Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = C_1 x^3 - x^2 + C_2$$

als allgemeine Lösung für v . Damit ist

$$y(x) = C_1 x^3 e^{2x} + C_2 e^{2x} - x^2 e^{2x}$$

für alle $x > 0$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Für die Lösung des Anfangswertproblems berechnen wir nun noch

$$y'(x) = 2C_1 x^3 e^{2x} + (3C_1 - 2)x^2 e^{2x} - 2xe^{2x} + 2C_2 e^{2x}$$

und sehen $y(1) = (C_1 + C_2 - 1)e^2$ sowie $y'(1) = (5C_1 + 2C_2 - 4)e^2$. Damit die Anfangswerte erfüllt sind, muss nun einerseits $C_1 + C_2 - 1 = -1$, also $C_2 = -C_1$ und zum anderen $5C_1 - 2C_1 - 4 = -1$, also $C_1 = 1$. Somit ist die Lösung gegeben durch

$$y(x) = x^3 e^{2x} - C_2 e^{2x} - x^2 e^{2x}$$