Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2016
25.05.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 12 (Übung)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen der Differentialgleichung

a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x + 6\mathrm{e}^{-x}$

und lösen Sie das Anfangswertproblem

b) $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}\sin(x), \quad y(0) = \frac{3}{5}, \quad y'(0) = 1.$

Lösungsvorschlag

Bei allen Aufgabenteilen handelt es sich um (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Für die jeweilige homogene Gleichung machen wir hier stets den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

a) Um die vorliegende inhomogene Gleichung zu lösen, berechnen wir zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und machen anschließend einen *Ansatz vom Typ der rechten Seite*. Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung ist

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3,$$

d.h. wir haben die dreifache Nullstelle $\lambda = -1$. Als Fundamentalsystem erhalten wir damit

$$\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$$

und als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Bei inhomogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Inhomogenität $p(x)e^{\sigma x}\cos(\omega x)$ oder $p(x)e^{\sigma x}\sin(\omega x)$ können wir eine spezielle Lösung mit dem Ansatz

$$y_p(x) = q_1(x)x^k e^{\sigma x}\cos(\omega x) + q_2(x)x^k e^{\sigma x}\sin(\omega x)$$

finden, wobei q_1 und q_2 Polynome von gleichem Grad wie p sind und k die Vielfachheit der Nullstelle $\sigma + i\omega$ im charakteristischen Polynom ist (d.h. der Ausdruck x^k in obigem Ansatz fällt weg, falls $\sigma + i\omega$ keine Nullstelle ist). Tritt nun eine *Summe* aus Inhomogenitäten der obigen Form auf, so bilden wir die *Summe* der jeweiligen Ansätze. Ein Ansatz dieser Art heißt *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

In unserem Fall wählen wir also den Ansatz: $y_p(x) = ax + b + cx^3 e^{-x}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hier gilt

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= a + ce^{-x}(-x^3 + 3x^2), \\ y_p''(x) &= ce^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x), \\ y_p'''(x) &= ce^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$y_p'''(x) + 3y_p''(x) + 3y_p'(x) + y_p(x) = ax + (3a + b) + 6ce^{-x} \stackrel{!}{=} x + 6e^{-x},$$

d.h. mit $a = 1, b = -3, c = 1$ erhalten wir $y_p(x) = x - 3 + x^3 e^{-x}$ als spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = x - 3 + x^3 e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Wie bei Teilaufgabe a) berechnen wir zuerst die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die homogene Gleichung $y'' - 2y' + 2y = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet somit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Als Ansatz für eine spezielle Lösung machen wir hier den Ansatz

$$y_p(x) = ae^{2x}\cos(x) + be^{2x}\sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (2a + b)e^{2x}\cos(x) + (-a + 2b)e^{2x}\sin(x), \\ y_p''(x) &= (3a + 4b)e^{2x}\cos(x) + (-4a + 3b)e^{2x}\sin(x). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = (a + 2b)e^{2x}\cos(x) + (-2a + b)e^{2x}\sin(x) \stackrel{!}{=} e^{2x}\sin(x) \iff a + 2b = 0 \wedge -2a + b = 1.$$

Als Lösung erhalten wir daraus $a = -\frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}$ und damit $y_p(x) = -\frac{2}{5}e^{2x}\cos(x) + \frac{1}{5}e^{2x}\sin(x)$, sowie

$$y(x) = -\tfrac{2}{5}e^{2x}\cos(x) + \tfrac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Zur Lösung des Anfangswertproblems leiten wir zunächst ab und erhalten

$$y'(x) = \tfrac{4}{5}e^{2x}\sin(x) - \tfrac{3}{5}e^{2x}\cos(x) + (-c_1 + c_2)e^x \sin(x) + (c_1 + c_2)e^x \cos(x).$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen führt uns schließlich auf

$$y(0) = \tfrac{3}{5} \iff c_1 - \tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} \iff c_1 = 1,$$

und

$$y'(0) = 1 \iff -\tfrac{3}{5} + (1 + c_2) = 1 \iff c_2 = \tfrac{3}{5}.$$

Die Lösung ist damit gegeben durch

$$y(x) = \tfrac{1}{5}e^{2x}\Big(\sin(x) - 2\cos(x)\Big) + \tfrac{1}{5}e^{x}\Big(3\sin(x) + 5\cos(x)\Big).$$

Aufgabe 13 (Tutorium)

a) Für die Differentialgleichung

$$y^{(8)} + y^{(7)} - 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + 10y^{(4)} - 4y''' - 4y'' + 12y' + 8y = h(x)$$

ist das charakteristischen Polynom durch

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda + 2)(\lambda - (1 + \mathrm{i}))^2(\lambda - (1 - \mathrm{i}))^2$$

gegeben. Welcher Ansatz ist für die partikuläre Lösung zu wählen, falls $h(x)$ durch

(i) $\mathrm{e}^x \sin(x)$	(ii) e^{-x}	(iii) $x^3\mathrm{e}^x \sin(x)$	(iv) $(x^4 + 4x)\mathrm{e}^{-x}$
(v) $\sin(x)$	(vi) e^{-2x}	(vii) $(x^2 + 1)\sin(x)$	(viii) x^4

gegeben ist?

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' - y'' + y' - y = \sinh(x)$$

mit $y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{3}{4}$ und $y''(0) = -1$.

Lösungsvorschlag

a) Der Ansatz für die partikuläre Lösung mit Inhomogenität $h(x) = q(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x)$ (bzw. $\cos(\omega x)$ statt $\sin(\omega x)$) lautet

$$y_p(x) = x^\nu[\tilde{q}(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x) + \tilde{r}(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x)],$$

wobei $\tilde{q}$ und $\tilde{r}$ Polynome mit maximal dem Grad von q sind und ν die Vielfachheit der Nullstelle $\sigma + \mathrm{i}\omega$ des charakteristischen Polynoms (Null ist möglich).

(i) Es ist $q(x) \equiv 1$, $\sigma = \omega = 1$. Da $1 + \mathrm{i}$ eine zweifache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = x^2[A\mathrm{e}^x \sin(x) + B\mathrm{e}^x \cos(x)].$$

(ii) Es ist $q(x) \equiv 1$, $\sigma = -1$, $\omega = 0$. Da -1 eine dreifache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = Ax^3\mathrm{e}^{-x}.$$

(iii) Es ist $q(x) = x^3$, $\sigma = \omega = 1$. Da $1 + \mathrm{i}$ eine zweifache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^2[(A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)\mathrm{e}^x \sin(x) + (B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0)\mathrm{e}^x \cos(x)] \\ &= (A_3x^5 + A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2)\mathrm{e}^x \sin(x) + (B_3x^5 + B_2x^4 + B_1x^3 + B_0x^2)\mathrm{e}^x \cos(x) \end{aligned}$$

(iv) Es ist $q(x) = x^4 + 4x$, $\sigma = -1$, $\omega = 0$. Da -1 eine dreifache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = x^3(A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)\mathrm{e}^{-x} = (A_4x^7 + A_3x^6 + A_2x^5 + A_1x^4 + A_0x^3)\mathrm{e}^{-x}.$$

(v) Es ist $q(x) \equiv 1$, $\sigma = 0$, $\omega = 1$. Da i keine Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)].$$

(vi) Es ist $q(x) \equiv 1$, $\sigma = -2$, $\omega = 0$. Da -2 eine einfache Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-2x}.$$

(vii) Es ist $q(x) = x^2 + 1$, $\sigma = 0$, $\omega = 1$. Da i keine Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = (A_2x^2 + A_1x + A_0)\sin(x) + (B_2x^2 + B_1x + B_0)\cos(x).$$

(viii) Es ist $q(x) = x^4$, $\sigma = 0$, $\omega = 0$. Da 0 keine Nullstelle von p ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0.$$

b) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom q lautet:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Eine Nullstelle $\lambda_1 = 1$ von p kann erraten werden. Polynomdivision liefert:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

Damit sind $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ die verbleibenden Nullstellen von p. Alle Nullstellen haben die Vielfachheit 1. Die Funktionen y_1, y_2 und y_3 mit

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = \cos(x), \qquad y_3 = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ bilden also ein Fundamentalsystem für die obige Differentialgleichung (vgl. Abschnitt 1.11 der Vorlesung).

Es gilt $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir suchen zunächst eine partikuläre Lösung y_p^1 für die Inhomogenität $\frac{e^x}{2}$. Dafür machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite" (siehe Abschnitt 1.11 der Vorlesung):

$$y_p^1(x) = Cxe^x$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\left[y_p^1\right]'(x) &= C(x+1)e^x, \\
\left[y_p^1(x)\right]'' &= C(x+1+1)e^x = (x+2)e^x, \\
\left[y_p^1(x)\right]''' &= C(x+3)e^x
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
\left[y_p^1\right]'''(x) - \left[y_p^1\right]''(x) + \left[y_p^1(x)\right]' - y_p^1(x) &= \frac{e^x}{2} \\
\overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} C((x+3) - (x+2) + (x+1) - x) &= \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow 2C &= \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow C &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Damit ist $y_p^1(x) = \frac{x}{4}e^x$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung mit der Inhomogenität $\frac{e^x}{2}$.

Nun suchen wir eine partikuläre Lösung y_p^2 für die Inhomogenität $-\frac{e^{-x}}{2}$. Auch dafür machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite" (siehe Abschnitt 1.11 der Vorlesung):

$$y_p^2(x) = Ce^{-x}$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\left[y_p^2\right]'(x) &= -Ce^{-x}, \\
\left[y_p^2(x)\right]'' &= Ce^{-x}, \\
\left[y_p^2(x)\right]''' &= -Ce^{-x}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
\left[y_p^2\right]'''(x) - \left[y_p^2\right]''(x) + \left[y_p^2(x)\right]' - y_p^2(x) &= -\frac{e^{-x}}{2} \\
\overset{e^{-x} \neq 0}{\Leftrightarrow} C(-1-1-1-1) &= -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow C &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Damit ist $y_p^2(x) = \frac{1}{8}e^x$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung mit der Inhomogenität $-\frac{e^{-x}}{2}$. Damit löst $y_p = y_p^1 + y_p^2$ die gegebene Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + y_p(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit freien Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Diese werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \left[C_1 e^x + C_2\cos(x) + C_3\sin(x) + \frac{x}{4}e^x + \frac{1}{8}e^{-x}\right]_{x=0} = C_1 + C_2 + \frac{1}{8} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow C_1 + C_2 &= \frac{3}{8}, \\
y'(0) &= \left[C_1 e^x - C_2\sin(x) + C_3\cos(x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)e^x - \frac{1}{8}e^{-x}\right]_{x=0} = C_1 + C_3 + \frac{1}{8} \stackrel{!}{=} \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow C_1 + C_3 &= \frac{5}{8} \Rightarrow C_3 = C_2 + \frac{1}{4}, \\
y''(0) &= \left[C_1 e^x - C_2\cos(x) - C_3\sin(x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{2}{4}\right)e^x + \frac{1}{8}e^{-x}\right]_{x=0} = C_1 - C_2 + \frac{5}{8} \stackrel{!}{=} -1 \\
\Leftrightarrow C_1 - C_2 &= -\frac{13}{8} \Rightarrow 2C_1 = -\frac{10}{8},\ 2C_2 = \frac{16}{8} \Rightarrow C_3 = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Also ist $y(x) = \cos(x) + \frac{5}{4}\sin(x) + \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{8}\right)e^x + \frac{1}{8}e^{-x}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 14 (Übung)

Geben Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen an.

a) $x^2 y^{(4)} + 5xy''' + y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$.

b) $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = 1 + \left(\log(x)\right)^2$.

Lösungsvorschlag

Bei genauerer Betrachtung erkennen wir, dass es sich bei den folgenden Aufgaben stets um (homogene bzw. inhomogene) Euler'sche Differentialgleichungen handelt. Hier machen wir die Substitution $x = e^t \iff t = \log x$, welche uns auf eine (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $u(t) = y(e^t)$ führt. Diese könnten wir nun mit den bekannten Methoden lösen und anschließend rücksubstituieren. Es ist hierbei allerdings nicht zwingend notwendig die andere Differentialgleichung auszurechnen. In der Lösungstheorie für lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten machen wir stets den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Setzen wir in diesen nun die Substitution $t = \log x$ ein, so erhalten wir

$$y(x) = u(\log x) = e^{\lambda \log x} = x^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

als Ansatz, mit dem wir auch direkt eine Lösung berechnen können.

a) Der Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, führt auf

$$\begin{aligned}
\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)x^{\lambda-4+2} + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3+1} + \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 2\lambda x^{\lambda-1-1} - 2x^{\lambda-2} = 0 \\
\iff \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 \\
&= (\lambda-1)\big(\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) + 5\lambda(\lambda-2) + \lambda + 2\big) \\
&= (\lambda-1)(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = (\lambda-1)^3(\lambda+2)
\end{aligned}$$

mit der dreifachen Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und der einfachen Nullstelle $\lambda_2 = -2$. Damit ist

$$\{x, x\log x, x(\log x)^2, x^{-2}\}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung und als allgemeine Lösung erhalten wir

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \log x + c_3 x(\log x)^2 + c_4 x^{-2}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Wir substituieren $t := \log x$ und setzen $u(t) := y(e^t) \iff y(x) = u(\log x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(\log x)\tfrac{1}{x}, \\ y''(x) &= u''(\log x)\tfrac{1}{x^2} - u'(\log x)\tfrac{1}{x^2}, \\ y'''(x) &= u'''(\log x)\tfrac{1}{x^3} - 3u''(\log x)\tfrac{1}{x^3} + 2u'(\log x)\tfrac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

Einsetzen führt uns dann auf die Differentialgleichung

$$u'''(t) - u(t) = 1 + t^2.$$

Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung ist

$$\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)(\lambda + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung für u ist somit

$$u_{\text{hom}}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t) + c_3 e^{-t/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da die Inhomogenität ein Polynom 2. Grades ist, machen wir den Ansatz

$$u_p(t) = at^2 + bt + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

mit $u_p'(t) = 2at + b$, $u_p''(t) = 2a$ und $u_p'''(t) = 0$ (an dieser Stelle sei angemerkt, dass wir ohne Substitution den Ansatz $y_p(x) = a(\log x)^2 + b\log x + c$ hätten wählen können). Setzen wir ein, so erhalten wir mit Koeffizientenvergleich

$$-at^2 - bt - c \stackrel{!}{=} 1 + t^2 \quad \iff \quad a = -1, b = 0, c = -1,$$

also $u_p(t) = -t^2 - 1$. Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für u gegeben durch

$$u(t) = -t^2 - 1 + c_1 e^t + c_2 e^{-t/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t) + c_3 e^{-t/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

und nach Rücksubstitution erhalten wir schließlich als Lösung

$$y(x) = -(\log x)^2 - 1 + c_1 x + c_2 x^{-1/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x) + c_3 x^{-1/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 15 (Tutorium)

a) Geben Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an.

$$x^4 y^{(4)} + 6x^3 y''' - 2xy' + 20y = 0.$$

b) Lösen Sie für $x > 0$ das folgende Anfangswertproblem.

$$y'' + \tfrac{1}{x} y' - \tfrac{1}{x^2} y = \tfrac{\log(x)}{x^2}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1.$$

Lösungsvorschlag

Bei genauerer Betrachtung erkennen wir, dass es sich bei den folgenden Aufgaben stets um (homogene bzw. inhomogene) Euler'sche Differentialgleichungen handelt. Hier machen wir die Substitution $x = e^t \iff t = \log x$, welche uns auf eine (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $u(t) = y(e^t)$ führt. Diese könnten wir nun mit den bekannten Methoden lösen und anschließend rücksubstituieren. Es ist hierbei allerdings nicht zwingend notwendig die andere Differentialgleichung auszurechnen. In der Lösungstheorie für lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten machen wir stets den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Setzen wir in diesen nun die Substitution $t = \log x$ ein, so erhalten wir

$$y(x) = u(\log x) = e^{\lambda \log x} = x^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

als Ansatz, mit dem wir auch direkt eine Lösung berechnen können.

a) Setzen wir den Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ein, so erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}&\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 6\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda + 20\\ &\quad = \lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20\\ &\quad = (\lambda+2)^2(\lambda-2-i)(\lambda-2+i).\end{aligned}$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = -2$ und den einfachen Nullstellen $\lambda_2 = 2+i$ und $\lambda_3 = 2-i$. Damit erhalten wir als Fundamentalsystem

$$\{x^{-2}, x^{-2}\log x, x^2\cos(\log x), x^2\sin(\log x)\},$$

und als allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2}\log x + c_3 x^2 \cos(\log x) + c_4 x^2 \sin(\log x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Setzen wir den Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ein, so erhalten wir als charakteristisches Polynom der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist damit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 x + c_2 x^{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung wollen wir uns an den Ansätzen vom Typ der rechten Seite orientieren. Mit der Substitution $t := \log x$ hätten wir als Inhomogenität das Polynom t von Grad 1 erhalten, d.h. wir würden $at + b$ als speziellen Ansatz wählen. Mit obiger Substitution erhalten wir aber gerade den Ansatz

$$y_p(x) = a \log x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

mit $y_p'(x) = a\frac{1}{x}$ und $y_p''(x) = -a\frac{1}{x^2}$. Multiplikation der Differentialgleichung mit x^2 und Einsetzen des Ansatzes führt uns auf

$$-a + a - a \log x - b \overset{!}{=} a \log x + b \quad \Longleftrightarrow \quad a = -1,\ b = 0,$$

d.h. $y_p(x) = -\log x$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = -\log x + c_1 x + c_2 x^{-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung davon ist $y'(x) = -\frac{1}{x} + c_1 - c_2\frac{1}{x^2}$, und mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$y(1) = c_1 + c_2 = 2 \quad \text{und} \quad y'(1) = -1 + c_1 - c_2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 1.$$

D.h. die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = -\log x + x + x^{-1}.$$

Aufgabe 16 (Übung)

Gegeben sie das Anfangswertproblem

$$y'' - \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}y = \sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 42$$

das mit einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lösbar ist.

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $a_n (n \in \mathbb{N}_0)$ an.

b) Zeigen Sie mit Hilfe einer Induktion, dass die ungeraden Koeffizienten ab a_3 gegeben sind durch

$$a_{2k+3} = \frac{k!}{(2k+3)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Lösungsvorschlag

a) Da $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, bekommen wir $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und deshalb

$$-\frac{1}{2}xy'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n}{2} x^n.$$

Ferner haben wir

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n,$$

und die Sinusreihe lautet

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Deshalb bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} - \frac{na_n}{2} + \frac{a_n}{2}\right)x^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Für $n = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, erhalten wir $(2k+2)(2k+1)a_{2k+2} - \frac{2ka_{2k}}{2} + \frac{a_{2k}}{2} = 0$ oder

$$(2k+2)(2k+1)a_{2k+2} = \frac{(2k-1)a_{2k}}{2}.$$

Da aber $a_0 = y(0) = 0$, folgt, dass $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wenn $n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bekommen wir $(2k+3)(2k+2)a_{2k+3} - \frac{(2k+1)a_{2k+1}}{2} + \frac{a_{2k+1}}{2} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ oder

$$a_{2k+3} = \frac{ka_{2k+1}}{(2k+3)(2k+2)} + \frac{(-1)^k}{(2k+3)!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{0.1}$$

Schlielich gilt $a_1 = y'(0) = 42$.

b) Wir zeigen das mit Induktion. Für $k = 0$ bekommen wir mit Verwendung der Formel (**??**)

$$a_3 = \frac{(-1)^0}{3!} = \frac{0!}{(2 \cdot 0 + 3)!} \sum_{l=0}^{0} \frac{(-1)^l}{l!},$$

also stimmt die Aussage für $k = 0$. Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für ein beliebiges aber festes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wahr ist. Zu zeigen ist, dass

$$a_{2k+5} = \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{(-1)^l}{l!}.$$

In der Tat bekommen wir wegen (**??**)

$$a_{2k+5} = \frac{(k+1)a_{2k+3}}{(2k+5)(2k+4)} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+5)!}$$

was wegen der Induktionsannahme gibt

$$a_{2k+5} = \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+5)!}$$

$$= \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} + \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{(-1)^l}{l!},$$

was zu zeigen war. Deshalb stimmt die Aussage für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aufgabe 17 (Tutorium)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + 2xy' - y = (1 + x + x^2)e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2},$$

welches mit einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gelöst werden kann.

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n an.

b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten explizit gegeben sind durch

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot (n-1)!}, \quad n \geq 1.$$

c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems in geschlossener Form an.

Lösungsvorschlag

a) Wir machen einen Potenzreihenansatz, d.h. es gilt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\begin{aligned}
y'' + 2xy' - y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + 2n a_n x^n - a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n \Big) x^n.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Exponentialreihe auf der rechten Seite der Gleichung führt zu

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2)e^x = (1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}x^n \\
&= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \right) x^n \\
&= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} x^n.
\end{aligned}$$

Setzen wir die beiden Ausdrücke gleich, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n \Big) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} x^n.$$

Da die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig sind, folgt direkt

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n = \frac{1+n^2}{n!},$$

und daraus erhalten wir die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+2} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n \geq 0.$$

b) Wir wollen die Aussage mit vollständiger Induktion beweisen. Setzen wir die Anfangswerte ein, so erhalten wir

$$y(0) = a_0 = 0, \quad y'(0) = a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 0!}.$$

Damit folgt

$$a_2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2 \cdot 1!},$$

d.h. die Aussage ist korrekt für $n = 1, 2$ und der Induktionsanfang ist gemacht. Gilt die Aussage $a_n = \frac{1}{2\cdot(n-1)!}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2\cdot n!}$ für ein $n \geq 1$ (IV), so folgt

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}a_n \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{2\cdot(n-1)!} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2+2n^2-(2n-1)n}{(n+2)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+n}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{2\cdot(n+1)!}, \end{aligned}$$

und völlig analog $a_{n+3} = \frac{1}{2\cdot(n+2)!}$.

c) Mit Aufgabenteil b) gilt nun $a_0 = 0$ und $a_n = \frac{1}{2\cdot(n-1)!}$ für $n \geq 1$. Damit folgt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot(n-1)!}x^n = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = \frac{x}{2}e^x.$$