Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2016
08.06.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt

Aufgabe 18 (Übung)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung 1,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0,$$

für $x > 0$ an.

Aufgabe 19 (Tutorium)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' - xy' + \left(\frac{3}{4} - x^2\right)y = 0$$

für $x > 0$ an.

Aufgabe 20 (Übung)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' + \tfrac{3}{2}xy' + xy = 0$$

für $x > 0$ an.

Aufgabe 21 (Tutorium)

a) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = -y, \qquad y(0) = -1,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie alle Approximationen y_n ($n \in \mathbb{N}$) der Lösung aus der Fixpunktiteration und geben sie die maximale Lösung an.

b) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswerproblem

$$y' = x^2 + xy^2, \qquad y(0) = 0,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie die potentiellen Approximationen y_n aus der Fixpunktiteration für $n = 1, 2, 3$.

Aufgabe 22 (Übung)

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1,1)\times(-1,1)\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{für } x=0,\ |y|<1,\\ 2x, & \text{für } 0<|x|<1,\ -1<y\le 0,\\ 2x-4\frac{y}{x}, & \text{für } 0<|x|<1,\ 0<y<x^2,\\ -2x, & \text{für } 0<|x|<1,\ x^2\le y<1, \end{cases}$$

und das Anfangswertproblem

$$y'(x)=f\big(x,y(x)\big),\quad y(0)=0.$$

a) Vergewissern Sie sich, dass f stetig ist.

b) Wenden Sie das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf an. Was fällt Ihnen hierbei auf?

Aufgabe 23 (Tutorium)

Es seien $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$. Stellen Sie die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0 \tag{$\star$}$$

als System linearer Differentialgleichungen dar. Setzen Sie dazu

$$z_1:=y,\quad z_2:=y',\quad \dots\quad z_n:=y^{(n-1)}$$

und $\vec{z}:=(z_1,\dots,z_n)$. Geben Sie nun eine Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ an, sodass $\vec{z}$ genau dann eine Lösung von

$$\vec{z}\,'=A\vec{z}$$

ist, wenn y die Differentialgleichung $(\star)$ erfüllt. Berechnen Sie anschließend $\det(\lambda I-A)$.