Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2016
08.06.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 18 (Übung)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung der Ordnung 1,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0,$$

für $x > 0$ an.

Lösungsvorschlag

Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz liefert

$$f(s) = s(s-1) + s - 1 = s^2 - 1 = (s+1)(s-1).$$

Offensichtlich sind ± 1 die Nullstellen dieser Funktion und laut Vorlesung sind die beiden Lösungen gegeben durch

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y_2(x) = A\log(x)y_1(x) + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

wobei wir $A \in \{0,1\}$ noch nicht bestimmen können, da wir uns im Fall befinden, dass die beiden Nullstellen um eine natürliche Zahl (hier 2) unterscheiden. Es gilt

$$y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2},$$

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^{n-1},$$

$$y_1''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_{n-1} x^{n-2}.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\
&= (a_0 - a_0)x^1 + (2a_1 + 2a_1 - a_1)x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n(n-1)a_{n-1} + n a_{n-1} + a_{n-3} - a_{n-1}) x^n \\
&= 3a_1 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} [(n^2-1)a_{n-1} + a_{n-3}] x^n.
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert, dass a_0 beliebig ist, $a_1 = 0$ und

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2)} \qquad \forall n \geqslant 2.$$

Somit sind die ungeraden Koeffizienten alle 0 und für die geraden Koeffizienten gilt

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2)} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2k(k+1)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Rekursives Anwenden dieser Gleichung liefert

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)!}a_0.$$

Diese Gleichung beweisen wir mit einer kurzen Induktion.
IA ($k = 1$): $a_2 = -\frac{a_0}{8}$ folgt sofort aus der ursprünglichen Rekursionsformel.
IS ($k \to k+1$): Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{2^2(k+1)(k+2)} \overset{\text{(IV)}}{=} -\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)! \cdot 2^2k(k+1)}a_0 = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2(k+1=}(k+1)!(k+2)!}a_0,$$

womit die Formel bewiesen ist. Die Funktion (setze $a_0 = \frac{1}{2}$)

$$y_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)!}x^{2k} = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

löst die Ausgangsgleichung (sogar auf ganz R). Für y_2 versuchen wir uns zunächst mit dem logarithmusfreien Ansatz ($A = 0$). Es gilt

$$y_2(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^{n-2},$$

$$y_2'(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} nb_{n+1}x^{n-1},$$

$$y_2''(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} n(n-1)b_{n+1}x^{n-2}.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=-1}^{\infty} n(n-1)b_{n+1}x^n + \sum_{n=-1}^{\infty} nb_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^n - \sum_{n=-1}^{\infty} b_{n+1}x^n \\
&= (2b_0 - b_0 - b_0)x^{-1} - b_1x^0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n(n-1)b_{n+1} + nb_{n+1} + b_{n-1} - b_{n+1})x^n \\
&= -b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n^2-1)b_{n+1} + b_{n-1}]x^n.
\end{aligned}$$

Dies liefert wieder, dass b_0 beliebig ist, $b_1 = 0$ und

$$(n^2-1)b_{n+1} = b_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für $n = 1$ liefert dies aber $0 = b_0$, womit rekursiv alle Koeffizienten 0 wären und y_2 somit die konstante Nullfunktion, ein Widerspruch. Deshalb müssen wir im Ansatz $A = 1$ wählen. Nun folgt, dass sich y_2 um den Term

$$\log(x)y_1(x)$$

unterscheidet, y_2' um den Term

$$\frac{y_1(x)}{x} + \log(x)y_1'(x)$$

und y_2'' um den Term

$$-\frac{y_1(x)}{x^2} + \frac{2}{x}y_1'(x) + \log(x)y_1''(x).$$

Beim Einsetzen in die Gleichung ergibt sich aus dem jeweils letzten Term genau die Gleichung (multipliziert mit $\log(x)$), die 0 ergibt, weil y_1 eine Lösung ist. Der jeweils erste Term von y_2' und y_2'' hebt sich weg und übrig bleibt (von $x^2y''(x)$) der Term

$$2xy_1'(x),$$

womit ingesamt die Differentialgleichung nach Einsetzen des Ansatzes die Form

$$0 = 2xy_1'(x) - b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n^2-1)b_{n+1} + b_{n-1}]x^n$$

hat, was, wenn wir y_1 einsetzen und den Term auf die andere Seite bringen zu

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k}k!(k+1)!}x^{2k+1} = -b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n^2-1)b_{n+1} + b_{n-1}]x^n$$

wird. Daraus folgt $b_0 = -1$,$b_1 = 0$,

$$((2k)^2-1)b_{2k+1} + b_{2k-1} = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

und somit $0 = b_1 = b_3 = b_5 = \ldots$, da links die geraden Koeffizienten fehlen, und schließlich

$$((2k+1)^2-1)b_{2k+2} + b_{2k} = -\frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k}k!(k+1)!} \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

wobei b_2 frei wählbar ist und normalerweise auf $b_2 = -\frac{1}{4}$ gesetzt wird. Es folgt

$$b_{2k} = \frac{(-1)^k(h_k + h_{k-1})}{2^{2k}(k-1)!k!} \qquad \forall k \geqslant 2,$$

wobei $h_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$, was wir mit einer Induktion beweisen können.
<u>IA ($k = 2$):</u> Es gilt nach der Rekursionsformel

$$b_4 = -\frac{-1\cdot 3}{2^2 1!2!\cdot 8} - \frac{b_2}{8} = \frac{5}{64} = \frac{(-1)^2(1+\frac{1}{2}+1}{2^4 1!2!}.$$

IS ($k \to k+1$): Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt mit $((2k+1)^2 - 1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$ aus der Rekursionsformel, dass

$$b_{2(k+1)} = b_{2k+2} = -\frac{b_{2k}}{4k(k+1)} - \frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k}(k-1)!k!}.$$

Setzen wir die Induktionsvoraussetzung ein, so ergibt sich

$$b_{2(k+1)} = -\frac{(-1)^k(h_k + h_{k-1})}{2^{2k}(k-1)!k! \cdot 4k(k+1)} - \frac{(-1)^k(2k+1)}{2^{2k}k!(k+1)! \cdot 4k(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}[(h_k + h_{k-1}) + \frac{2k+1}{k(k+1)}]}{2^{2(k+1)}((k+1)-1)!(k+1)!}.$$

Wegen $\frac{2k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ folgt $(h_k + h_{k-1}) + \frac{2k+1}{k(k+1)} = h_{k+1} + h_k$ und somit die Behauptung. Damit ergibt sich für die zweite Lösung die Darstellung

$$y_2(x) = \log(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(h_k + h_{k-1})}{2^{2k}(k-1)!k!} x^{2k-1}.$$

Die allgemeine Lösung für $x > 0$ ist dann gegeben durch

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 19 (Tutorium)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' - xy' + \left(\frac{3}{4} - x^2\right) y = 0$$

für $x > 0$ an.

Lösungsvorschlag

Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz liefert die determinierende Gleichung (an der DGL ablesen!)

$$f(s) = s(s-1) - s + \frac{3}{4} = s^2 - 2s + \frac{3}{4} = 0,$$

mit den Nullstellen $s_1 = \frac{1}{2}$ und $s_2 = \frac{3}{2}$. Wegen $|s_2 - s_1| = 1 \in \mathbb{N}$ müssen wir für die zweite Lösung unter Umständen den Logarithmusterm mit betrachten. Wir erhalten außerdem die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(1+s)c_1 &= 0, \\ f(n+s)c_n - c_{n-2} &= 0 \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

- $s_2 = \frac{3}{2}$: In diesem Fall lauten die Rekurrenzgleichungen

$$\begin{aligned} 2c_1 &= 0, \\ c_n &= \frac{c_{n-2}}{n(n+1)} \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

  Damit folgt $c_{2k+1} = 0$, sowie $c_{2k} = \frac{1}{(2k+1)!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$y_2(x) = x^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sqrt{x} \sinh(x)$$

für alle $x > 0$.

- $s_1 = \frac{1}{2}$: Wir versuchen zunächst den „logarithmusfreien" Ansatz (vgl. Satz 1.14 der Vorlesung). In diesem Fall lauten die Rekurrenzgleichungen

$$\begin{aligned} 0 \cdot c_1 &= 0, \\ c_n &= \frac{c_{n-2}}{n(n-1)} \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

  Wegen der ersten Gleichung, kann c_1 frei gewählt werden, etwa $c_1 = 0$. Die zweite Gleichung liefert dann $c_{2k+1} = 0$, sowie $c_{2k} = \frac{1}{(2n)!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Damit führt der „logarithmusfreie" Ansatz in der Tat zum Ziel und es ist

$$y_1(x) = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \sqrt{x} \cosh(x)$$

  für alle $x > 0$.

Aufgabe 20 (Übung)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + \tfrac{3}{2} x y' + x y = 0$$

für $x > 0$ an.

Lösungsvorschlag

Wir machen den Ansatz

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda-2},$$

und wir erhalten wir für die linke Seite der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x^2 y'' + \tfrac{3}{2} x y' + x y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{3}{2}(n+\lambda) a_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda+1} \\ &= \lambda(\lambda-1) a_0 x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda} + \tfrac{3}{2}\lambda a_0 x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{3}{2}(n+\lambda) a_n x^{n+\lambda} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+\lambda} \\ &= \lambda(\lambda + \tfrac{1}{2}) a_0 x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n + \tfrac{3}{2}(n+\lambda) a_n + a_{n-1} \Big) x^{n+\lambda} \\ &= \lambda(\lambda + \tfrac{1}{2}) a_0 x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((n+\lambda)(n+\lambda+\tfrac{1}{2}) a_n + a_{n-1} \Big) x^{n+\lambda}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich für $n = 0$ liefert die determinierende Gleichung $\lambda(\lambda + \frac{1}{2}) = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N}$ erhalten wir nach Vorlesung ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung von der Form

$$y_1(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad y_2(x) = x^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

Für $\lambda_1 = 0$ machen wir einen Koeffizientenvergleich (mit $0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$) und erhalten

$$n(n + \tfrac{1}{2})c_n + c_{n-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_n = -\frac{4c_{n-1}}{2n(2n+1)}, n \geq 1.$$

Wir wählen nun $c_0 = 1$ (hier könnten wir jeden Wert ungleich 0 wählen) und erhalten so

$$c_1 = -\frac{4}{6} = -\frac{4}{3!} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4^2}{5!}.$$

Ausgehend davon vermuten wir $c_n = \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, was sich durch vollständige Induktion auch bestätigt: Für $n = 0$ ist die Aussage wahr. Nehmen wir nun an, dass die Aussage für ein beliebiges $n \geq 0$ wahr ist (IV), so folgt

$$c_{n+1} = -\frac{4c_n}{(2n+2)(2n+3)} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{(-4)^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{(-4)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}.$$

Damit folgt

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} \sqrt{x}^{2n} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(2\sqrt{x}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(2\sqrt{x}).$$

Im Falle von $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ liefert ein Koeffizientenvergleich

$$(n - \tfrac{1}{2})nd_n + d_{n-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d_n = -\frac{4d_{n-1}}{2n(2n-1)}, \quad n \geq 1.$$

Völlig analog zum ersten Fall lässt sich nun für $d_0 = 1$ induktiv zeigen, dass die Koeffizienten explizit durch

$$d_n = \frac{(-4)^n}{(2n)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gegeben sind. Damit folgt

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{n-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} \sqrt{x}^{2n} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(2\sqrt{x}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(2\sqrt{x}).$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(2\sqrt{x}) + c_2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(2\sqrt{x}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 21 (Tutorium)

a) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = -y, \qquad y(0) = -1,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie alle Approximationen y_n ($n \in \mathbb{N}$) der Lösung aus der Fixpunktiteration und geben sie die maximale Lösung an.

b) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswerproblem

$$y' = x^2 + xy^2, \qquad y(0) = 0,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie die potentiellen Approximationen y_n aus der Fixpunktiteration für $n = 1, 2, 3$.

Lösungsvorschlag

a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) = -y$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist F stetig und stetig partiell nach y differenzierbar:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -1 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Das zu lösende Anfangswertproblem ist also

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(0) = -1.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat es also eine eindeutige maximale Lösung.

Die Picard-Iteration ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_{n+1}(x) &= -1 - \int_0^x y_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -1 + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = -1 + x, \\ y_2(x) &= -1 - \int_0^x (-1+t)\,\mathrm{d}t = -1 + x - \frac{1}{2}x^2, \\ y_3(x) &= -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3, \\ y_4(x) &= -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies legt die Behauptung

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Tatsächlich gilt (Beweis durch vollständige Induktion):

- **IA** ($n=0$):

$$y_0(x) = -1 = \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- **IS** ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $n+1$:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= -1 - \int_0^x y_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(IV)}}{=} -1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^x t^k\,\mathrm{d}t \\ &= -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)} x^{k+1} = -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} -1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Picard-Iterierte für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen

$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = -e^{-x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung bestätigt

$$y'(x) = e^{-x} = -y(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist y auch die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

b) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) = x^2 + xy^2$. Dann ist F für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig partiell nach y differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist das gegebene Anfangswertproblem demnach eindeutig lösbar. Die Picard-Iteration ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_{n+1}(x) &= \int_0^x t^2 + t y_n^2(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$y_1(x) = \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x t^2 + \frac{t^7}{9}\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{72},$$

$$y_3(x) = \int_0^x t^2 + t\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^8}{72}\right)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^x t^2 + \frac{t^7}{9} + \frac{t^{12}}{108} + \frac{t^{17}}{5184} \,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{72} + \frac{x^{13}}{1404} + \frac{x^{18}}{93312}.$$

Nach einem Hinweis in der Vorlesung konvergiert diese Folge nun auf einer kleinen Umgebung der 0 (gleichmäßig) gegen die tatsächliche Lösung.

Aufgabe 22 (Übung)

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1,1)\times(-1,1) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0,\ |y| < 1, \\ 2x, & \text{für } 0 < |x| < 1,\ -1 < y \le 0, \\ 2x - 4\frac{y}{x}, & \text{für } 0 < |x| < 1,\ 0 < y < x^2, \\ -2x, & \text{für } 0 < |x| < 1,\ x^2 \le y < 1, \end{cases}$$

und das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \quad y(0) = 0.$$

a) Vergewissern Sie sich, dass f stetig ist.

b) Wenden Sie das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf an. Was fällt Ihnen hierbei auf?

Lösungsvorschlag

a) Die Funktion f ist auf $(-1,1)\times(-1,1)$ stetig, denn sie ist in den einzelnen Teilbereichen stetig und die Definitionen stimmen an den gemeinsamen Rändern überein.

b) Führen wir für $x \in (-1,1)$ die Iteration von Picard-Lindelöf aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y(0) = 0, \\ y_1(x) &= 0 + \int_0^x f\big(t, y_0(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2, \\ y_2(x) &= 0 + \int_0^x f\big(t, y_1(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x -2t\,\mathrm{d}t = -x^2, \\ y_3(x) &= 0 + \int_0^x f\big(t, y_2(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2, \end{aligned}$$

und damit folgt

$$y_n(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \\ -x^2, & \text{falls } n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert hier also nicht. Auch die konvergenten Teilfolgen $(y_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren nicht gegen eine Lösung der Differentialgleichung, denn für $u_1(x) := x^2$ und $u_2(x) := -x^2$ gilt

$$u_1'(x) = 2x \neq -2x = f\big(x, u_1(x)\big) \quad \text{und} \quad u_2'(x) = -2x \neq 2x = f\big(x, u_2(x)\big).$$

Da f aber stetig ist, existiert nach dem Satz von Peano (mindestens) eine Lösung. Hier ist z.B. $y(x) = \frac{1}{3}x^2$ eine Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 23 (Tutorium)

Es seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{$\star$}$$

als System linearer Differentialgleichungen dar. Setzen Sie dazu

$$z_1 := y, \quad z_2 := y', \quad \dots \quad z_n := y^{(n-1)}$$

und $\vec{z} := (z_1, \dots, z_n)$. Geben Sie nun eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ an, sodass $\vec{z}$ genau dann eine Lösung von

$$\vec{z}\,' = A\vec{z}$$

ist, wenn y die Differentialgleichung ($\star$) erfüllt. Berechnen Sie anschließend $\det(\lambda I - A)$.

Lösungsvorschlag

Wir schreiben $z_1 := y$, $z_2 := y', \dots, z_n := y^{(n-1)}$ und

$$\vec{z}(x) := \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Dann erfüllt y die Gleichung ($\star$) genau dann, wenn $\vec{z}$ eine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems ist:

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x), \\ z_2'(x) &= y''(x) = z_3(x), \\ &\vdots \\ z_{n-1}'(x) &= y^{(n-1)}(x) = z_n(x), \\ z_n'(x) &= y^{(n)}(x) = -a_0 y(x) - \cdots - a_{n-1} y^{(n-1)}(x) = -a_0 z_1(x) - \cdots - a_{n-1} z_n(x). \end{aligned}$$

Dies können wir schreiben als

$$\vec{z}\,'(x) = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}'(x) \\ z_n'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \\ z_n(x) \end{pmatrix} = A_n \vec{z}(x).$$

Für $n = 1$ ist $A_1 = \begin{pmatrix} -a_0 \end{pmatrix}$ und daher

$$\det(\lambda I - A_1) = \det(\lambda + a_0) = \lambda + a_0.$$

Ist $n = 2$, so ist $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ und somit

$$\det(\lambda I - A_2) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ a_0 & \lambda + a_1 \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda a_1 + a_0.$$

Per vollständiger Induktion weisen wir nun nach, dass

$$\det(\lambda I - A_n) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Den Induktionsanfang haben wir oben bereits gesehen. Nehmen wir nun an, dass unsere Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, so folgt

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A_{n+1}) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Add. } n\text{te Zeile} \\ \text{auf } (n+1)\text{te Zeile}}}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \lambda + a_{n-1} & \lambda + a_n - 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entw. nach} \\ (n+1)\text{ter Spalte}}}{=} \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{pmatrix} + (\lambda + a_n - 1)\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \det(\lambda I - A_n) + (\lambda + a_n - 1)\lambda^n \overset{\text{(IV)}}{=} \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 + \lambda^{n+1} + \lambda^n a_n - \lambda^n \\
&= \lambda^{n+1} + a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0.
\end{aligned}$$