Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2016
06.07.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgabe 32 (Übung)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 3\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sin(2x-3t) && x,t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= xe^x && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 33 (Übung)

a) Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= xe^y && (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= x+1 && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x},t) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x},t) + \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{x},t) &= t^2(x-y+z) && \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(\vec{x},0) &= e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} && \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 34 (Übung)

Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} t\partial_t u(x,t) + \tfrac{t}{xu(x,t)}\partial_x u(x,t) + u(x,t) &= 0, && x,t > 0, \\ u(\xi,\xi^2) &= 1, && \xi > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 35 (Übung)

Wir betrachten die eindimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u(x,t) + x^2\partial_x u(x,t) + 2xu(x,t) = 0, \qquad x,t > 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x), \qquad x > 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem Charakteristikenverfahren.

Aufgabe 36 (Tutorium)

Bestimmen Sie die beschränkte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, & x^2+y^2>1, \\ u(x,y) &= x, & x^2+y^2=1, \end{aligned}$$

indem Sie es in Polarkoordinaten betrachten und den Separationsansatz verwenden.

Aufgabe 37 (Tutorium)

Die Telegraphengleichung

$$\partial_{tt}u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) + 2\partial_t u(x,t) + u(x,t) = 0$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x>0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist nun die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x=0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = 3\sin(2t)$ für $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Zeigen Sie, dass ein Separationsansatz der Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ nicht zu einer Lösung führt.

b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Ansatzes $u(x,t) = u_0 e^{-ax}\sin(2t-bx)$ mit $a>0$, $b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 38 (Tutorium)

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Wärmeleitungsproblems mit einem Separationsansatz:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \partial_{xx}u(x,t) = 0, &\qquad 0<x<1, t>0, \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0 &\qquad \text{für } t>0, \\ u(x,0) = \cos(\pi x), &\qquad \text{für } 0<x<1. \end{aligned}$$

Aufgabe 39 (Tutorium)

a) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung

$$\partial_{tt}u(\vec{x},t) - \Delta_{\vec{x}}u(\vec{x},t) = 0, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe des Separationsansatzes $u(\vec{x},t) = e^{ikt}v(\vec{x})$, $k \in \mathbb{R}$, auf die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

führt.

b) Finden Sie Lösungen zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$v(x_1,0) = v(x_1,b) = v(0,x_2) = v(a,x_2) = 0$$

für $a,b>0$, indem Sie einen Separationsansatz benutzen.