

HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 6. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 32 (ÜBUNG)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 3 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + 2 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \sin(2x - 3t) & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= xe^x & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Das gegebene Anfangswertproblem lässt sich in der Form eines linearen Transportproblems äquivalent schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \underbrace{\frac{3}{2}}_{=:a} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{2} \sin(2x - 3t) =: g(x, t) & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= xe^x =: f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nach der Vorlesung ist seine Lösung durch

$$u(x, t) = f(x - ta) + \int_0^t g(x - (t - \tau)a, \tau) d\tau \quad x, t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Wir berechnen

$$\frac{1}{2} \int_0^t \sin\left(2\left(x - (t - \tau)\frac{3}{2}\right) - 3\tau\right) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2x - 3t) d\tau = \frac{t}{2} \sin(2x - 3t) \quad x, t \in \mathbb{R},$$

womit

$$u(x, t) = \left(x - \frac{3t}{2}\right) e^{x - \frac{3t}{2}} + \frac{t}{2} \sin(2x - 3t) \quad x, t \in \mathbb{R}$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems definiert.

AUFGABE 33 (ÜBUNG)

a) Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= xe^y & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= x + 1 & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}, t) + 2 \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x}, t) + \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{x}, t) = t^2(x - y + z) \quad \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R},$$

$$u(\vec{x}, 0) = e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Wir ersetzen formal y gegen t . Dann lautet das gegebene Randwertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \underbrace{(-1)}_{=:a} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -xe^t =: g(x, t) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, 0) = x + 1 =: f(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Seine Lösung ist nach der Vorlesung durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - ta) + \int_0^t g(x - (t - \tau)a, \tau) d\tau \\ &= (x + t) + 1 - \int_0^t (x + (t - \tau))e^\tau d\tau \\ &= x + t + 1 - (x + t)[e^\tau]_{\tau=0}^t + \int_0^t \underbrace{\tau}_u \underbrace{e^\tau}_{v'} d\tau \\ &\stackrel{\text{Part. Int.}}{=} 2(x + t) + 1 - (x + t)e^t + [\tau e^\tau]_{\tau=0}^t - \int_0^t e^\tau d\tau \\ &= 2(x + t) + 1 - (x + t)e^t + te^t - e^t + 1 \\ &= 2(x + t + 1) - (x + 1)e^t \end{aligned}$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

b) Es liegt das lineare Transportproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \vec{a}} \cdot \nabla u(\vec{x}, t) = t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \vec{b}} \cdot \vec{x} =: g(\vec{x}, t) \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R},$$

$$u(\vec{x}, 0) = e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} =: f(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

vor. Seine Lösung ist nach der Vorlesung durch

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}, t) &= f(\vec{x} - t\vec{a}) + \int_0^t g(\vec{x} - (t - \tau)\vec{a}, \tau) d\tau \\
 &= e^{-\frac{(x-t)^2 + (y-2t)^2 + (z-t)^2}{2}} + \int_0^t \tau^2 \vec{b} \cdot (\vec{x} - (t - \tau)\vec{a}) d\tau \\
 &= e^{-\frac{(x-t)^2 + (y-2t)^2 + (z-t)^2}{2}} + \int_0^t \tau^2 \vec{b} \cdot \vec{x} d\tau - \int_0^t \tau^2 (t - \tau) \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{a})}_{=0} d\tau \\
 &= e^{-\frac{(x-t)^2 + (y-2t)^2 + (z-t)^2}{2}} + \frac{1}{3} t^3 (x - y + z)
 \end{aligned}$$

für alle $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

AUFGABE 34 (ÜBUNG)

Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
 t \partial_t u(x, t) + \frac{t}{xu(x, t)} \partial_x u(x, t) + u(x, t) &= 0, & x, t > 0, \\
 u(\xi, \xi^2) &= 1, & \xi > 0.
 \end{aligned}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Hier liegt eine quasilineare Differentialgleichung der Form

$$\vec{a}(x, t, u) \cdot \nabla u = b(x, t, u) \quad (x, t) \in D,$$

für $u = u(x, t)$ vor, mit

$$\vec{a}(x, t, u) = \begin{pmatrix} \frac{t}{xu} \\ t \end{pmatrix}, \quad b(x, t, u) = -u, \quad \text{und} \quad D := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, t > 0\}.$$

Eine Parametrisierung von $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$, also der Ansatz $\vec{k}(s) := \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ und $w(s) := u(\vec{k}(s))$, führt dann gemäß Vorlesung auf das charakteristische System

$$\begin{aligned}
 k_1'(s) &= \frac{k_2(s)}{k_1(s)w(s)}, \\
 k_2'(s) &= k_2(s), \\
 w'(s) &= -w(s).
 \end{aligned}$$

Für jedes feste $\xi > 0$ wählen wir als Anfangsbedingung die Werte

$$k_1(0) = \xi, \quad k_2(0) = \xi^2, \quad w(0) = 1,$$

da auf der Kurve $\Gamma := \{(\xi, \xi^2), \xi > 0\}$ die Anfangswerte vorgegeben sind. Damit erhalten wir zunächst

$$k_2(s) = c_2 e^s, \quad c_2 \in \mathbb{R},$$

und $k_2(0) = \xi^2$ liefert,

$$k_2(s) = \xi^2 e^s.$$

Für w folgt

$$w(s) = c_3 e^{-s}, \quad c_3 \in \mathbb{R},$$

sowie $w(0) = c_3 \stackrel{!}{=} 1$, d.h. es ist

$$w(s) = e^{-s}.$$

Setzen wir dies in die erste Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$k_1'(s) = \xi^2 e^{2s} \frac{1}{k_1(s)},$$

welches wir mit Trennung der Variablen lösen können. Hier finden wir (beachte $k_1(s) = x > 0$)

$$k_1(s) = \sqrt{\xi^2 e^{2s} + c_1}, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

sowie $k_1(0) = \sqrt{\xi^2 + c_1} \stackrel{!}{=} \xi \iff c_1 = 0$, d.h.

$$k_1(s) = \xi e^s.$$

Damit sind die Grundcharakteristiken gegeben durch

$$\vec{k}(s, \xi) = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ \xi^2 e^s \end{pmatrix},$$

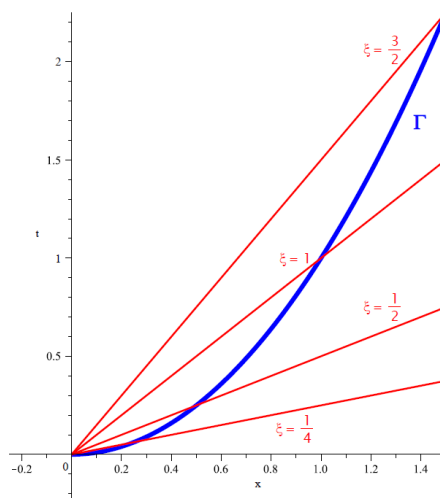
und es gilt

$$\vec{k}(s, \xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \iff \xi e^s = x, \xi^2 e^s = t \iff \xi = x e^{-s}, e^s = \frac{t}{\xi^2} \iff \xi = \frac{t}{x}, s = \log\left(\frac{x^2}{t}\right)$$

So weit hätten wir hier aber eigentlich gar nicht umformen brauchen, da wir lediglich $e^{-s} = \frac{t}{x^2}$ benötigen. Damit erhalten wir nämlich die Lösung

$$u(x, t) = w(s, \xi) = e^{-s} = \frac{t}{x^2}, \quad (x, t) \in D.$$

Anmerkung: Für die Grundcharakteristiken gilt hier (wenn wir s eliminieren) $t = \xi^2 e^s = \xi x$. Halten wir also ξ fest, so entsprechen die Grundcharakteristiken in der (x, t) -Ebene Geraden mit Steigung ξ . Siehe Skizze:



AUFGABE 35 (ÜBUNG)

Wir betrachten die eindimensionale Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u(x, t) + x^2 \partial_x u(x, t) + 2xu(x, t) = 0, \quad x, t > 0,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sin(x), \quad x > 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem Charakteristikenverfahren.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Das charakteristische System dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= k_1(s)^2, \\ k_2'(s) &= 1, \\ w'(s) &= -2k_1(s)w(s), \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten

$$k_1(0) = \xi, \quad k_2(0) = 0, \quad w(0) = \sin(\xi)$$

für $\xi > 0$. Mit Trennung der Variablen erhalten wir für die erste Gleichung die allgemeine Lösung

$$k_1(s) = -\frac{1}{s + c_1}, \quad s < -c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Der Anfangswert liefert $k_1(0) = -\frac{1}{c_1} \stackrel{!}{=} \xi \iff c_1 = -\frac{1}{\xi}$, und somit

$$k_1(s) = -\frac{1}{s - \frac{1}{\xi}} = \frac{\xi}{1 - s\xi}, \quad s < \frac{1}{\xi}$$

Für k_2 erhalten wir als allgemeine Lösung $k_2(s) = s + c_2$ und aus dem Anfangswert folgt $c_2 = 0$. D.h.

$$k_2(s) = s, .$$

Die letzte Gleichung ergibt sich nun nach Einsetzen zu

$$w'(s) = \frac{2\xi}{s\xi - 1} w(s),$$

welche die allgemeine Lösung $w(s) = c_3(s\xi - 1)^2$ besitzt. Hier gilt nun $w(0) = c_3 \stackrel{!}{=} \sin(\xi)$, also erhalten wir

$$w(s) = \sin(\xi)(s\xi - 1)^2, \quad s < \frac{1}{\xi}.$$

Die Einschränkung für s kommt vom Definitionsbereich des Koeffizienten der Differentialgleichung. Für die Grundcharakteristiken gilt dann

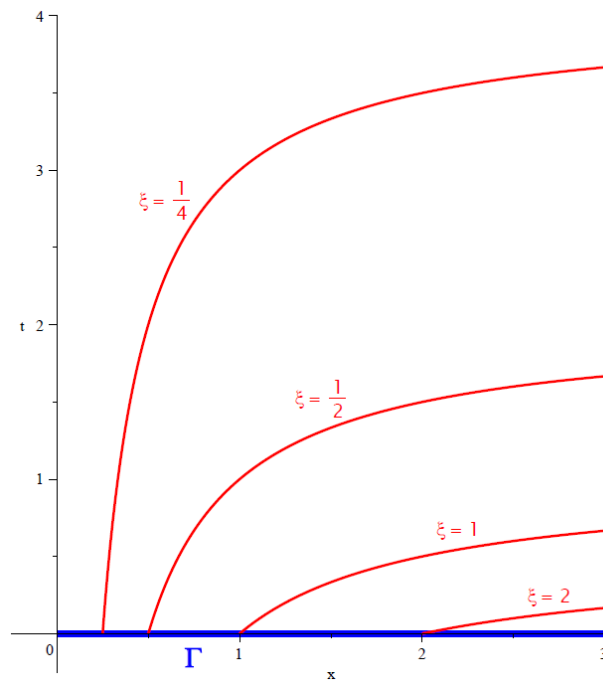
$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \vec{k}(s, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{1-s\xi} \\ s \end{pmatrix} \iff x = \frac{\xi}{1-s\xi}, t = s \iff \xi = \frac{x}{1+tx}, s = t.$$

Dabei ist $\xi = \frac{x}{1+tx} > 0$ und $s = t = -\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\xi}$ (Auflösen der ersten Gleichung nach t), womit für alle $x, t > 0$ ein Paar (s, ξ) in der erlaubten Menge $\{(s, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi > 0, s < \frac{1}{\xi}\}$ gefunden werden kann.

Eisetzen in w , liefert dann die Lösung

$$u(x, t) = w(s, \xi) = \sin\left(\frac{x}{1+tx}\right)\left(\frac{tx}{1+tx} - 1\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{1+tx}\right)}{(1+tx)^2}.$$

Anmerkung: Die Elimination von s in den Grundcharakteristiken liefert hier den Zusammenhang $t = -\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi}$ für jedes feste $\xi > 0$. Für ausgewählte ξ erhalten wir dann in der (x, t) -Ebene das folgende Schaubild:



AUFGABE 36 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie die beschränkte Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, & x^2 + y^2 > 1, \\ u(x, y) &= x, & x^2 + y^2 = 1, \end{aligned}$$

indem Sie es in Polarkoordinaten betrachten und den Separationsansatz verwenden.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Wir machen den Separationsansatz $v(r, \varphi) = v_1(r)v_2(\varphi)$. Da wir an nichttrivialen Lösungen interessiert sind, gibt es Punkte $r > 1$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$, sodass dort v_1 und v_2 nicht Null sind. Laut dem Hinweis der letzten Aufgabe gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{(\partial r)^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{(\partial \varphi)^2}(r, \varphi) \\ &= v_1''(r)v_2(\varphi) + \frac{v_2(\varphi)}{r} v_1'(r) + \frac{v_1(r)}{r^2} v_2''(\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \quad (r > 1, \varphi \in (0, 2\pi)) \\ \Rightarrow \frac{v_2''(\varphi)}{v_2(\varphi)} &= -\left(\frac{r^2 v_1''(r)}{v_1(r)} + \frac{r v_1'(r)}{v_1(r)}\right) \end{aligned}$$

Somit müssen beide Seiten konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ sein und es folgt

$$v_2(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\varphi} \quad (\varphi \in (0, 2\pi))$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Damit u auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, muss

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0+} v_2(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi-} v_2(\varphi) \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0+} v_2'(\varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi-} v_2'(\varphi)$$

gelten. Für die erste Gleichung muss entweder $\lambda = 0$ (und wegen der zweiten Gleichung dann $v_2(\varphi) = C_2$) sein oder $\lambda < 0$, was mit der zweiten Gleichung

$$\lambda = -k^2 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}$$

ergibt und somit $v_{2,k}(\varphi) = C_1 \sin(k\varphi) + C_2 \cos(k\varphi)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

Ferner ergibt sich

$$r^2 v_1''(r) + r v_1'(r) + \lambda v_1(r) = 0 \quad (r > 1).$$

Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung für v_1 . Wir substituieren deshalb $r = e^s$, $w(s) = v_1(e^s)$ für $s \in \mathbb{R}$. Es folgt $w'(s) = e^s v_1'(e^s) = r v_1'(r)$ und $w''(s) = e^s v_1''(e^s) + e^{2s} v_1''(e^s) = r v_1''(r) + r^2 v_1''(e^s)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$w''(s) + \lambda w(s) = 0 \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Für $\lambda = 0$ ist also

$$w(s) = C_1 s + C_2 \quad (s \in \mathbb{R}),$$

und für $\lambda = -k^2 < 0$ ist

$$w(s) = C_1 e^{ks} + C_2 e^{-ks} \quad (s \in \mathbb{R})$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Resubstituieren liefert

$$v_1(r) = \begin{cases} C_1 \log(r) + C_2, & \text{falls } k = 0, \\ C_1 r^{-k} + C_2 r^k, & \text{falls } k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (r > 1).$$

Da die Laplace-Gleichung linear ist, machen wir den Ansatz (alle Summanden der Teillösungen multiplizieren und die verschiedenen Werte für k addieren)

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) = & C_0 + C_1 \log(r) + \sum_{k=1}^N C_k^{(1)} r^k \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^N C_k^{(2)} r^k \sin(k\varphi) + \\ & \sum_{k=1}^N C_k^{(3)} r^{-k} \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^N C_k^{(4)} r^{-k} \sin(k\varphi) \end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $N \in \mathbb{N}$, $C_0, C_1, C_1^{(1)}, \dots, C_N^{(1)}, C_1^{(2)}, \dots, C_N^{(2)}, C_1^{(3)}, \dots, C_N^{(3)}, C_1^{(4)}, \dots, C_N^{(4)} \in \mathbb{R}$.

Da die Terme $\log(r)$, $r^k \cos(k\varphi)$ und $r^k \sin(k\varphi)$ unbeschränkt sind, können sie nicht vorkommen. Die Randbedingung $u(x, y) = x$ für $x^2 + y^2 = 1$ lautet in Polarkoordinaten $v(1, \varphi) = \cos(\varphi)$ für $\varphi \in (0, \varphi)$. Einsetzen von $r = 1$ in den Ansatz und Vergleich mit der Randbedingung liefert $N = 1$, $C_0 = 0$, $C_1^{(4)} = 0$, $C_1^{(3)} = 1$, also

$$v(r, \varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{r} \quad (r \geq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

bzw.

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \geq 1).$$

AUFGABE 37 (TUTORIUM)

Die Telegraphengleichung

$$\partial_{tt}u(x, t) - \partial_{xx}u(x, t) + 2\partial_tu(x, t) + u(x, t) = 0$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist nun die Signalspannung $u(x, t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = 3 \sin(2t)$ für $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung für $x \rightarrow \infty$ beschränkt sein.

- a) Zeigen Sie, dass ein Separationsansatz der Form $u(x, t) = v(x)w(t)$ nicht zu einer Lösung führt.
- b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Ansatzes $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Machen wir einen Separationsansatz der Form

$$u(x, t) = v(x)w(t),$$

so können wir wegen der Randbedingung $v = 0$ und $w = 0$ ausschließen (insb. ist auch $v(0) \neq 0$). Außerdem folgt

$$u(0, t) = v(0)w(t) \stackrel{!}{=} 3 \sin(2t) \iff w(t) = \frac{3}{v(0)} \sin(2t).$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\partial_t u(x, t) = \frac{6}{v(0)} v(x) \cos(2t),$$

$$\partial_{tt} u(x, t) = -\frac{12}{v(0)} v(x) \sin(2t),$$

$$\partial_{xx} u(x, t) = \frac{3}{v(0)} v''(x) \sin(2t),$$

und damit

$$\begin{aligned} & \partial_{tt}u(x, t) - \partial_{xx}u(x, t) + 2\partial_tu(x, t) + u(x, t) \\ &= -\frac{12}{v(0)}v(x)\sin(2t) - \frac{3}{v(0)}v''(x)\sin(2t) + \frac{12}{v(0)}v(x)\cos(2t) + \frac{3}{v(0)}v(x)\sin(2t) \\ &= \left(-\frac{9}{v(0)}v(x) - \frac{3}{v(0)}v''(x)\right)\sin(2t) + \frac{12}{v(0)}v(x)\cos(2t) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\iff -\frac{9}{v(0)}v(x) - \frac{3}{v(0)}v''(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{12}{v(0)}v(x) = 0 \iff v = 0, \end{aligned}$$

was wir anfangs ausgeschlossen haben. Also führt der Separationsansatz hier zu keiner Lösung.

b) Versuchen wir hingegen den Ansatz

$$u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

so folgt mit der Randbedingung zunächst $u_0 = 3$ und die Beschränktheit der Lösung liefert $a \geq 0$. Weiter haben wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= 6e^{-ax} \cos(2t - bx), \\ \partial_{tt} u(x, t) &= -12e^{-ax} \sin(2t - bx), \\ \partial_x u(x, t) &= -3ae^{-ax} \sin(2t - bx) - 3be^{-ax} \cos(2t - bx), \\ \partial_{xx} u(x, t) &= 3(a^2 - b^2)e^{-ax} \sin(2t - bx) + 6abe^{-ax} \cos(2t - bx). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$\begin{aligned} &\partial_{tt} u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) + 2\partial_t u(x, t) + u(x, t) \\ &= -12e^{-ax} \sin(2t - bx) - 3(a^2 - b^2)e^{-ax} \sin(2t - bx) - 6abe^{-ax} \cos(2t - bx) \\ &\quad + 12e^{-ax} \cos(2t - bx) + 3e^{-ax} \sin(2t - bx) \\ &= e^{-ax} \left((3b^2 - 3a^2 - 9) \sin(2t - bx) + (12 - 6ab) \cos(2t - bx) \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\iff 3b^2 - 3a^2 - 9 = 0 \quad \text{und} \quad 12 - 6ab = 0, \\ &\stackrel{a \geq 0}{\iff} a = 1, \quad b = 2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = 3e^{-x} \sin(2t - 2x).$$

AUFGABE 38 (TUTORIUM)

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Wärmeleitungsproblems mit einem Separationsansatz:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) &= 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ \partial_x u(0, t) = \partial_x u(1, t) &= 0 \quad \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos(\pi x), \quad \text{für } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Der Ansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$ mit $v, w \neq 0$ (u erfüllt sonst die Randbedingung nicht), liefert uns

$$v(x)w'(t) - v''(x)w(t) = 0 \iff \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von t abhängt, sie aber für alle x, t übereinstimmen, hängen beide Ausdrücke weder von x noch von t ab. Also existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{v''(x)}{v(x)} &= \lambda \iff v''(x) = \lambda v(x), \\ \frac{w'(t)}{w(t)} &= \lambda \iff w'(t) = \lambda w(t). \end{aligned}$$

Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen haben die allgemeinen Lösungen

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{und} \quad w(t) = c_3 e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Hier kann man auch bereits $\lambda = 0$ ausschließen, da sonst $u(x, 0) = \cos(\pi x)$ nicht erfüllt sein könnte. Aus den Randbedingungen $\partial_x u(0, t) = \partial_x u(1, t) = 0$ folgt $v'(0) = v'(1) = 0$. Mit

$$v'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} v'(0) &= \sqrt{\lambda}(c_1 - c_2) = 0 \iff c_1 = c_2, \\ v'(1) &= \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \iff e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \\ &\iff 2\sqrt{\lambda} = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\iff \lambda = -\pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen

$$v_n(x) = c_1 e^{\pi i n x} + c_1 e^{-\pi i n x} = 2c_1 \cos(\pi n x), \quad w_n(t) = c_3 e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

Aufsummieren liefert die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) w_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \cos(\pi x)$ erhalten wir nach Koeffizientenvergleich $a_1 = 1$ und $a_n = 0$ sonst. Insgesamt führt dies auf die Lösung

$$u(x, t) = \cos(\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

AUFGABE 39 (TUTORIUM)

a) Zeigen Sie, dass die Wellengleichung

$$\partial_{tt} u(\vec{x}, t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R},$$

mit Hilfe des Separationsansatzes $u(\vec{x}, t) = e^{ikt} v(\vec{x})$, $k \in \mathbb{R}$, auf die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

führt.

b) Finden Sie Lösungen zur Helmholtz-Gleichung

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$v(x_1, 0) = v(x_1, b) = v(0, x_2) = v(a, x_2) = 0$$

für $a, b > 0$, indem Sie einen Separationsansatz benutzen.

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Ist $u(\vec{x}, t) = e^{ikt} v(\vec{x})$ für ein $k \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\partial_t u(\vec{x}, t) = ike^{ikt} v(\vec{x}), \quad \partial_{tt} u(\vec{x}, t) = -k^2 e^{ikt} v(\vec{x}), \quad \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x}, t) = e^{ikt} \Delta v(\vec{x}).$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\partial_{tt} u(\vec{x}, t) - \Delta_{\vec{x}} u(\vec{x}, t) = -k^2 e^{ikt} v(\vec{x}) - e^{ikt} \Delta v(\vec{x}) \stackrel{!}{=} 0 \iff k^2 v(\vec{x}) + \Delta v(\vec{x}) = 0.$$

b) Machen wir nun den Ansatz

$$v(\vec{x}) = g(x_1)h(x_2)$$

so stellen wir zunächst fest, dass $g = 0$ und $h = 0$ die Lösung $v = 0$ liefern. Nehmen wir im Folgenden nun an, dass $g \neq 0$ und $h \neq 0$ ist, so folgt

$$\Delta v(\vec{x}) + k^2 v(\vec{x}) = g''(x_1)h(x_2) + g(x_1)h''(x_2) + k^2 g(x_1)h(x_2) \stackrel{!}{=} 0 \iff \frac{g''(x_1)}{g(x_1)} = -\frac{h''(x_2)}{h(x_2)} - k^2.$$

Da beide Seiten jeweils nur von einer Variable abhängen, existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{g''(x_1)}{g(x_1)} &= \lambda \iff g''(x_1) = \lambda g(x_1), \\ -\frac{h''(x_2)}{h(x_2)} - k^2 &= \lambda \iff h''(x_2) = -(k^2 + \lambda)h(x_2). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} g(x_1) &= c_1 e^{\sqrt{\lambda}x_1} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x_1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \\ h(x_2) &= c_3 e^{\sqrt{-k^2-\lambda}x_2} + c_4 e^{-\sqrt{-k^2-\lambda}x_2}, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen $v(0, x_2) = v(a, x_2) = 0$ bzw. $v(x_1, 0) = v(x_1, b) = 0$ liefern $g(0) = g(a) = 0$ bzw. $h(0) = h(b) = 0$. Setzen wir diese ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} g(0) &= c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0 \iff c_2 = -c_1, \\ g(a) &= c_1 e^{a\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-a\sqrt{\lambda}} \stackrel{!}{=} 0 \iff 2a\sqrt{\lambda} = 2\pi i M, \quad M \in \mathbb{N} \\ &\iff \lambda = -\pi^2 \frac{M^2}{a^2}, \quad M \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h(0) &= c_3 + c_4 \stackrel{!}{=} 0 \iff c_4 = -c_3, \\ h(b) &= c_3 e^{b\sqrt{-k^2-\lambda}} - c_3 e^{-b\sqrt{-k^2-\lambda}} \stackrel{!}{=} 0 \iff 2b\sqrt{-k^2-\lambda} = 2\pi i N, \quad N \in \mathbb{N} \\ &\iff -k^2 - \lambda = -\pi^2 \frac{N^2}{b^2}, \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dies führt uns auf

$$\begin{aligned} g_M(x_1) &= c_1 e^{i\pi \frac{M}{a} x_1} - c_1 e^{-i\pi \frac{M}{a} x_1} = a_M \sin\left(\frac{\pi M}{a} x_1\right), \\ h_N(x_2) &= c_3 e^{i\pi \frac{N}{b} x_2} - c_3 e^{-i\pi \frac{N}{b} x_2} = b_N \sin\left(\frac{\pi N}{b} x_2\right), \end{aligned}$$

für $M, N \in \mathbb{N}$ mit $k^2 = \pi^2 \frac{M^2}{a^2} + \pi^2 \frac{N^2}{b^2}$. Aufsummieren liefert uns dann die allgemeine Lösung

$$v(\vec{x}) = \sum_{M,N} c_{M,N} \sin\left(\frac{\pi M}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi N}{b} x_2\right),$$

wobei die Summe über alle Paare $(M, N) \in \mathbb{N}^2$ läuft mit $k^2 = \pi^2 \frac{M^2}{a^2} + \pi^2 \frac{N^2}{b^2}$.