HM 3 ETIT – 3. Übung

Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1}, \sigma, \omega, x_0 \in \mathbb{R}$, q_m Pol. m-ter Ord. ($m \in \mathbb{N}_0$)

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad \text{(HOM)}$$

$$\text{''} \qquad = q_m(x) e^{\sigma x} \begin{cases} \cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{cases} \qquad \text{(INHOM)}$$

$$\text{''} \qquad y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad \text{(AWP)}$$

1. Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$
bestimmen. Fundamentalsystem besteht aus n Funktionen, wobei
   (i) Reelle Nullstellen λ mit Vielfachheit $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen
   $$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$
   (ii) Nichtreelle Nullstelle $\mu \pm i\tau$ (treten paarweise auf) mit Vielfachheit $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen
   $$e^{\mu x}\cos(\tau x), e^{\mu x}\sin(\tau x), \ldots, x^{k-1}e^{\mu x}\cos(\tau x), x^{k-1}e^{\mu x}\sin(\tau x)$$
beitragen. Die allg. Lsg. von (HOM) ist eine Linearkombination dieser Funktionen.
2. Ansatz
$$\left[r_m(x)\cos(\omega x) + \tilde{r}_m \sin(\omega x) \right] x^{\nu} e^{\sigma x}$$
in (INHOM) einsetzen liefert spezielle Lösung. $r_m, \tilde{r}_m$ sind dabei Polynome vom Grad max. m, σ, ω von der Inhomogenität, ν Vielfachheit von $\sigma + i\omega$ als Nullstelle des char. Pol.
3. Allg. Lsg. von (INHOM) als Summe von 1. und 2. Lösung von (AWP) durch Einsetzen der AW zum Feststellen der Konstanten in 1.

<u>Bem:</u> Summen von Inhomogenitäten liefern Summen der Ansätze in 2.