Lin. DGL-Systeme mit konst. Koeff.: $I \subseteq \mathbb{R}$ Int., $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\vec{b}: I \to \mathbb{C}^n$ stetig, $\vec{y}_0 \in \mathbb{C}^n$, $x_0 \in I$

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) \qquad \text{(HOM)}$$

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{b}(x) \qquad \text{(INHOM)}$$

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{b}(x),\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \qquad \text{(AWP)}$$

zu (HOM): (i) A diagonalisierbar $\Rightarrow$ EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, EV $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, Lsg.

$$\vec{y}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \vec{v}_n,\quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$$

Für reelle A sind $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ und wir ersetzen $e^{\lambda_j x}\vec{v}_j \,/\, e^{\bar{\lambda}_j x}\bar{\vec{v}}_j$ durch den Real- und Imaginärteil von $e^{\lambda_j x}\vec{v}_j$, falls $\lambda_j \notin \mathbb{R}$.

(ii) A nicht diag. $\Rightarrow$ Ist λ EW mit alg. Vfh. m (d.h. m-fache Nst. des char. Pol.), so berechne Lsg. $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ von

$$(A - \lambda I)^m \vec{v} = 0.$$

Zugehörige Elemente des Fundamentalsystems sind

$$\vec{\Phi}_j(x) = e^{\lambda_j x}\left(\vec{v}_j + x(A-\lambda I)\vec{v}_j + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}\vec{v}_j\right),$$

was nach Abarbeiten aller EW n Fkt. liefert.

Schönste Lsg.: Löse $(A-\lambda I)\vec{v} = 0$, erweitere zu Lsg.-Raum von $(A-\lambda I)^2\vec{v} = 0, \dots,$ zu Lsg.-Raum von $(A-\lambda I)^m\vec{v} = 0$

Gilt auch für $A = A(x)$

zu (INHOM): Ist $\Phi(x) = (\vec{\Phi}_1(x) \cdots \vec{\Phi}_n(x))$ und $\{\vec{\Phi}_1, \dots, \vec{\Phi}_n\}$ das FS, so ist die Lösung

$$\vec{y}(x) = c_1\vec{\Phi}_1(x) + \dots + c_n\vec{\Phi}_n(x) + \Phi(x)\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,dx$$
$$= \Phi(x)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \Phi(x)\int \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)\,dx.$$

zu (AWP): Bestimme $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ durch Einsetzen von $x = x_0$ bzw.

$$\vec{y}(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}\vec{y}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t)\,dt.$$

Matrix-Exp.-Fkt.: $e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ existiert immer.

- $e^{tA} = \Phi(t)\cdot\Phi(0)^{-1}$
- $e^{tA} = S^{-1}e^{tD}S$, falls $A = S^{-1}DS$
- $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{td_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{td_n} \end{pmatrix}.$