KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SoSe 2018
20.04.2018

HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 0. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 1

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der Differentialgleichung auf dem angegebenen Intervall:

a) $y' = 3y + e^x \sin(x), \qquad I = \mathbb{R},$

b) $y' = -\frac{2y}{x} + 4x, \qquad I = (0,\infty).$

Lösungsvorschlag

a) Die Lösung der homogenen Gleichung des Problems kann direkt abgelesen werden: $y_h(x) = Ce^{3x}$ mit $C \in \mathbb{R}$. Variation der Konstanten liefert für den Ansatz $y_p(x) = C(x)e^{3x}$:

$$C'(x)e^{3x} = e^x \sin(x).$$

Eine Stammfunktion von C' ist dann $-\frac{1}{5}e^{-2x}(2\sin(x) + \cos(x))$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist gegeben durch

$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{1}{5}e^x(2\sin(x) + \cos(x)) \quad (C \in \mathbb{R}).$$

b) Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist

$$y_h(x) = Ce^{\int \frac{-2}{x}\,dx} = Ce^{-2\ln(x)} = Ce^{\ln(x^{-2})} = Cx^{-2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Variation der Konstanten liefert eine spezielle Lösung: Wir verwenden den Ansatz $y_p(x) = C(x)x^{-2}$ und erhalten

$$C'(x) = 4x^3 \quad \text{bzw.} \quad C(x) = x^4.$$

Damit ist $y_p(x) = x^2$ eine spezielle Lösung und

$$y(x) = \frac{C}{x^2} + x^2 \quad (C \in \mathbb{R})$$

ist die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

AUFGABE 2

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen:

a) $\begin{cases} y' = -y\tan(x) + \cos(x), \\ y(0) = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{1-x^2}y + 1 - x, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

Lösungsvorschlag

a) Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Diese ist gegeben durch $y_h(x) = Ce^{\int(-\tan(x))dx}$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Eine Stammfunktion von $-\tan$ ist $\int(-\tan(x))dx = \ln(\cos(x))$ und mithin ergibt sich $y_h(x) = Ce^{\int(-\tan(x))dx} = Ce^{\ln(\cos(x))} = C\cos(x)$. Mittels Variation der Konstanten wird nun eine spezielle Lösung ermittelt: Mache den Ansatz $y_p(x) = C(x)\cos(x)$. Dies eingesetzt gibt:

$$y_p'(x) = C'(x)\cos(x) - C(x)\sin(x) \stackrel{!}{=} -y_p(x)\tan(x) + \cos(x) = -C(x)\sin(x) + \cos(x).$$

Also zum Beispiel $C(x) = x$. Die allgemeine Lösung lautet dann entsprechend:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = (x + C)\cos(x).$$

Nun wird das in die Anfangsbedingung eingesetzt, woraus $C = 1$ folgt. Damit ist die Lösung y des Anfangswertproblems gegeben durch die Gleichung $y(x) = (x+1)\cos(x)$.

b) Die allgemeine Lösung des homogenen Problems ist gegeben durch $y_h(x) = Ce^{\int \frac{-2x}{1-x^2}dx} = Ce^{\ln(1-x^2)} = C(1-x^2)$ für $C \in \mathbb{R}$. Der Ansatz Variation der Konstanten liefert für eine partikuläre Lösung die Gleichung wegen

$$y_h'(x) = C'(x)(1-x^2) - 2xC(x).$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung liefert das

$$\begin{aligned} C'(x)(1-x^2) - 2x\,C(x) &= -\frac{2x}{1-x^2}C(x)(1-x^2) + 1 - x, \text{ d.h.} \\ C'(x) &= \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Damit liefert $C(x) = \ln(1+x)$ eine mögliche Wahl einer partikulären Lösung. Die allgmeine Lösung der Differentialgleichung ist dann gegeben durch $y(x) = C(1-x^2) + \ln(1+x)(1-x^2)$ für $C \in \mathbb{R}$. Setzt man die Anfangsbedingung ein, so erhält man $C = 2$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch $y(x) = 2(1-x^2) + \ln(1+x)(1-x^2)$.

Aufgabe 3

Ein Tank enthält 1000 Liter Wasser, in dem 50kg Salz gelöst sind. Beginnend zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ fließen pro Minute 10 Liter der Lösung aus dem Tank ab. Gleichzeitig fließt 10 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 2kg zu (Damit ist Zuflussvolumen gleich Abflussvolumen).

a) Stellen Sie die zu diesem Prozess gehörige Differentialgleichung auf und lösen Sie diese, d.h. bestimmen Sie wie groß der Salzgehalt s zur Zeit $t \geq 0$ ist.

b) Mit welchem Salzgehalt im Tank ist nach langer Zeit zu rechnen.

Hinweis: Sie können einfachheitshalber annehmen, dass Wasser und Salz zu jeder Zeit vollständig durchmischt sind.

Lösungsvorschlag

a) Um Einheiten zu vermeiden, behalten wir im Folgenden im Hinterkopf, dass s die Einheit kg und t die Einheit Minuten hat. Da ständig 1000 Liter im Tank sind, enthält zur Zeit $t \geq 0$ jeder Liter im Tank die $s(t)/1000$ Salz. Der Salzgehalt nach einer Minute setzt sich zusammen aus dem ursprünglichen Salzgehalt und dem im Ab- und Zufluss. Dann erhält man

$$s(t+\Delta t) = s(t) + \left(-10 \cdot \frac{s(t)}{1000} + 2\right)\Delta t$$

Die Änderungsgeschwindigkeit des Salzgehaltes erhält man dann wie folgt:

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = -10 \cdot \frac{s(t)}{1000} + 2.$$

Die den Prozess beschreibende Differentialgleichung ist daher

$$s'(t) = -\frac{s(t)}{100} + 2.$$

Hierbei handelt es sich um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Diese lösen wir indem wir zunächst eine Lösung der homogenen Gleichung bestimmen und anschließend die Methode *Variation der Konstanten* anwenden. Damit erhalten wir die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems mit Anfangswert $s(0) = 50$; diese ist gegeben durch

$$s(t) = 200 - 150 e^{-\frac{1}{100}t}.$$

b) Für $t \to \infty$ erhält man eine Salzkonzentration von $\frac{200}{1000}$, also 2 kg pro in 10 Litern, was gerade dem kostanten Zufluss entspricht.

Aufgabe 4

Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung

$$y' = a(x)y \tag{1}$$

mit $a\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Laut Vorlesung ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = c e^{\int a(x)dx}, \quad x \in I,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Es ist klar, dass dadurch Lösungen gegeben sind. Beweisen Sie nun, dass jede Lösung der Differentialgleichung (1) von dieser Gestalt ist.

Lösungsvorschlag

Sei y eine Lösung von (1). Daher gilt

$$\left(y e^{-\int a(x)dx}\right)' = y' e^{-\int a(x)dx} + y\left(-a(x)\right)e^{-\int a(x)dx} = \underbrace{(y' - a(x)y)}_{=0} e^{-\int a(x)dx} = 0.$$

Folglich existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $y(x)e^{-\int a(x)dx} = c$, d.h. $y(x) = c e^{\int a(x)dx}$ für $x \in I$.