Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SoSe 2018
26.04.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Tutorium)

Finden Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme auf einem möglichst großen Intervall.

a) $y' = -\frac{1}{2x}\frac{y^2-6y+5}{y-3}$ mit $y(1) = 2$.

b) $y' = e^{x-y-e^y}$ mit $y(1) = 0$.

Lösungsvorschlag

a) Es ist $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{x}$ und $g : (-\infty, 3) \to \mathbb{R}, g(y) = \frac{y^2-6y+5}{2y-6}$. Da g in 1 eine Nullstelle hat, ist $\tilde{J} = (1,3)$. Nach Separation erhalten wir für $x > 0$

$$\int_2^{y(x)} \frac{2s-6}{s^2-6s+5}\,\mathrm{d}s = \int_1^x -\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \quad\Longleftrightarrow\quad \ln(-y^2+6y-5) - \ln(3) = -\ln(x) + \ln(1) = -\ln(x).$$

Nun wenden wir die Exponentialfunktion an. Dies führt zu

$$y^2 - 6y + 5 = -\frac{3}{x} \quad\Longleftrightarrow\quad (y-3)^2 = 4 - \frac{3}{x} \quad\Longleftarrow\quad y(x) = 3 \pm \sqrt{4 - \frac{3}{x}}.$$

Das fehlende Vorzeichen wird durch $y(1) = 2$ zu einem Minus und wir haben die Lösung

$$y(x) = 3 - \sqrt{4 - \frac{3}{x}} \qquad \forall x > \frac{3}{4}$$

Dabei haben wir x auf den maximalen Definitionsbereich eingeschränkt, den diese Funktion hat. Es gilt dann $y(x) \in (1,3)$ und $y(x) \to 3$ für $x \to \frac{3}{4}$, womit y nicht fortgesetzt werden kann.

b) Es ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^y}$, $\tilde{J} = \mathbb{R}$.

$$\int_0^{y(x)} \mathrm{e}^s \mathrm{e}^{\mathrm{e}^s}\,\mathrm{d}s = \int_1^x \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{e}^{\mathrm{e}^y} - \mathrm{e} = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}.$$

Daraus folgt

$$e^{e^{y(x)}} = e^x$$

und somit

$$y(x) = \ln(\ln \mathrm{e}^x) = \ln(x) \qquad \forall x > 0$$

Wegen $y(x) \to -\infty$ für $x \to 0$ ist diese Lösung nicht fortsetzbar.

Aufgabe 2 (Übung)

Finden Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme auf einem möglichst großen Intervall.

a) $y' = x\mathrm{e}^{-x}y^2$ mit $y(0) = 1$.

b) $y' = \mathrm{e}^y \sin(x)$ mit $y(0) = -\ln(3)$.

c) $y' = -\frac{x^2}{y^3}$ mit $y(0) = \sqrt{2}$.

Lösungsvorschlag

a) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation der Vorlesung sei $I = \mathbb{R}$, $J = (0,\infty)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto xe^{-x}$, und $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto y^2$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x se^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &\overset{P.I.}{=} [-se^{-s}]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x e^{-s}\,\mathrm{d}s = [-se^{-s} - e^{-s}]_{s=0}^{s=x} = 1 - (1+x)e^{-x} \end{aligned}$$

für alle $x \in I$. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_1^y \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = 1 - \frac{1}{y}.$$

Laut Vorlesung ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist und $y(I_{x_0}) \subseteq J = (0,\infty)$, also $I_{x_0} = (-1,\infty)$. Da y in -1 nicht stetig fortsetzbar ist, ist dies das maximale Existenzintervall.

b) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation aus Abschnitt 1.1, sei $I = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$, $f = \sin$ und $g = \exp$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^x \sin(s)\,\mathrm{d}s = 1 - \cos(x).$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{-\ln(3)}^{y} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = 3 - \mathrm{e}^{-y}.$$

Nach Abschnitt 1.1 ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = -\ln(2 + \cos(x)).$$

Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist, also $I_{x_0} = \mathbb{R}$, was automatisch das maximale Existenzintervall ist.

c) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. In der Notation der Vorlesung sei $I = \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto -x^2$ und $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $y \mapsto \frac{1}{y^3}$. Wegen $u_0 = \sqrt{2}$ bietet es sich an, $J = \mathbb{R}^+$ zu wählen (das größte Intervall, welches y_0 enthält und auf dem g das Vorzeichen von $g(u_0) = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$ hat). Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{x} -s^2\,\mathrm{d}s = -\frac{x^3}{3}.$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist gegeben durch

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{2}}^{y} y^3\,\mathrm{d}s = \frac{y^4}{4} - 1$$

Nach Abschnitt 1.1 ergibt sich die Lösung $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ nun durch Auflösen der Gleichung $G(y(x)) = F(x)$ nach $y(x)$, also

$$y(x) = \sqrt{2}\sqrt[4]{1 - \frac{x^3}{3}},$$

wobei das Vorzeichen von y durch $y_0 = \sqrt{2}$ festgelegt ist. Dabei ist das Intervall I_{x_0} das größte Teilintervall von I mit $y_0 \in I_{x_0}$, auf dem y definiert ist, also $I_{x_0} = (-\infty, \sqrt[3]{3})$. Da $\lim_{x \to \sqrt[3]{3}} y(x) = 0$ und 0 nicht im Definitionsbereich von g liegt, haben wir das maximale Existenzintervall gefunden.

Aufgabe 3 (Tutorium)

Bei der Bewegung eines Körpers in Luft tritt bekannterweise ein Luftwiderstand auf. Aus der Strömungsmechanik ist bekannt, dass die Luftwiderstandskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist und durch die Formel

$$F_W = -\frac{1}{2} c_W \rho A v^2$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet c_W den Strömungswiderstandskoeffizienten, ρ die Dichte der Luft und A die projektive Querschnittsfläche des bewegten Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung. Der Strömungswiderstandskoeffizient c_W ist eine dimensionslose Größe, die abhängig von der Gestalt des Körpers ist und experimentell bestimmt werden muss.

Stellen Sie die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit v auf, welche die Bewegung in horizontaler Richtung unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes beschreibt und berechnen Sie die Lösung für die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$.

Lösungsvorschlag

Im Folgenden sei stets $k := \frac{1}{2} c_W \rho A$. In horizontaler Richtung wirkt auf den Körper nur die Luftwiderstandskraft, die damit der resultierenden Gesamtkraft entspricht. Damit gilt

$$\begin{aligned} F_{ges} &= F_W \\ \iff \quad ma &= -kv^2 \\ \iff \quad v' &= -\frac{k}{m} v^2. \end{aligned}$$

Falls $v_0 = 0$, folgt $v \equiv 0$. Im Falle $v_0 > 0$, erhalten wir mittels Trennung der Variablen

$$\int \frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v = -\frac{k}{m}t + c \quad \text{also} \quad v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t - c}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und mit $v(0) = v_0$ schließlich

$$v(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v_0}}.$$

Aufgabe 4 (Tutorium)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{2x} + \frac{y^\alpha}{2}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Lösen Sie für $\alpha = -1$ die Anfangswertprobleme mit $y(2) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

b) Lösen Sie für $\alpha = -2$ die Anfangswertprobleme mit $y(1) = \pm 1$.

Lösungsvorschlag

a) Die Koeffizientenfunktionen sind stetig auf $(0, \infty)$ (wir wählen das Intervall, in dem unser Anfangspunkt liegt). Wir multiplizieren unsere Gleichung mit $2y$ und definiere $z = y^2$. Somit folgt

$$z' = 2yy' = \frac{y^2}{x} + 1 = \frac{z}{x} + 1.$$

Der Anfangswert transformiert sich zu $z(2) = (y(2))^2 = \frac{3}{2}$. Zur Lösung dieses Anfangswertproblems berechnen wir

$$A(x) = \int_2^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) - \ln(2) = \ln(\frac{x}{2})$$

und

$$\int_2^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln(x) - 2\ln(2) = 2\ln(\frac{x}{2}).$$

Somit ist z gegeben durch

$$z(x) = \frac{3x}{4} + x\ln(\frac{x}{2}).$$

Die Rücktransformation liefert

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{3x}{4} + x\ln(\frac{x}{2})}.$$

Wenn wir nun den Anfangswert einsetzen, sehen wir, dass für $y(2) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ die Lösung

$$y(x) = \sqrt{\frac{3x}{4} + x\ln(\frac{x}{2})}$$

und für $y(2) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$y(x) = -\sqrt{\frac{3x}{4} + x\ln(\frac{x}{2})}$$

lautet für $x > 2e^{-\frac{3}{4}}$, da der Ausdruck in der Wurzel nur dann positiv ist.

b) Die Koeffizientenfunktionen sind stetig auf $(0,\infty)$ (wir wählen das Intervall, in dem unser Anfangspunkt liegt). Nun multiplizieren wir mit $3y^2$ und definieren $z = y^3$. Es folgt

$$z' = 3y^2y' = \frac{3y^2}{2x} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2x}z + \frac{3}{2}$$

Der Anfangswert wird zu $z(1) = (y(1))^3 = \pm 1$. Durch die unterschiedlichen Anfangswerte lösen wir die lineare Gleichung für z ohne Anfangswert. Es folgt

$$A(x) = \int \frac{3}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x) + C_1 = \ln(x^{\frac{3}{2}}) + C_1$$

und daher

$$\begin{aligned} z(x) &= C_2e^{A(x)} + e^{A(x)}\int e^{-A(x)}\frac{3}{2}\,\mathrm{d}x = C_2e^{A(x)} + x^{\frac{3}{2}}\int \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= C_2e^{A(x)} + x^{\frac{3}{2}} \cdot ((-3x^{-\frac{1}{2}}) + C_1) = (C_1 + C_2)x^{\frac{3}{2}} - 3x \end{aligned}$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Mit $y(1) = z(1) = 1$ folgt die Lösung

$$z(x) = 4x^{\frac{3}{2}} - 3x$$

und somit

$$y(x) = \sqrt[3]{4x^{\frac{3}{2}} - 3x}$$

für alle $x > \frac{9}{16}$ (da nur dort der Ausdruck in der Wurzel positiv ist).
Für $y(1) = z(1) = -1$ folgt die Lösung

$$z(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 3x$$

und somit

$$y(x) = -\sqrt[3]{3x - 2x^{\frac{3}{2}}}$$

für alle $0 < x < \frac{9}{4}$ (da nur dort der Ausdruck in der Wurzel positiv ist). Das Vorzeichen resuliert aus dem Anfangswert von y.

Aufgabe 5 (Übung)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme bzw. geben Sie bei **b)** die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an:

a) $y' = x(y + y^2)$ mit $y(0) = 1$.

b) $y' + y - y^3 = 0$ mit $y(0) = \frac{1}{2}$.

Lösungsvorschlag

a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = 2$). Wegen $y(0) = 1$, interessieren wir uns zunächst für Lösungen $y > 0$. Für solche darf man die Differentialgleichung durch $-y^2(x)$ dividieren und erhält die äquivalente Gleichung

$$-\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -x\left(\frac{1}{y(x)} + 1\right).$$

Definiere $z(x) = \frac{1}{y(x)}$. Wegen $y > 0$ ist z definiert und differenzierbar mit $z'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}$. Die obige Gleichung lautet dann

$$z' = -x(z+1).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für z. Eine partikuläre Lösung $z_p(x) = -1$ ist leicht zu erraten. Die allgemeine Lösung z_h der homogenen Gleichung ist durch

$$z_h(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also $z(x) = z_p(x) + z_h(x) = -1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. Durch die Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1$ wird $C = 2$ festgelegt. Es gilt

$$z(t) > 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} > -\ln(2) \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2\ln(2)} := x_0.$$

Also ist die Lösung y der ursprünglichen Gleichung zumindest auf dem Intervall $I = (-x_0, x_0)$ existent und eindeutig durch

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{2e^{-\frac{x^2}{2}} - 1}$$

für alle $x \in I$ gegeben. Wegen

$$\lim_{x \to -x_0+} y(x) = \lim_{x \to x_0-} y(x) = \infty$$

ist sie weder nach links noch nach rechts weiter fortsetzbar.

b) Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 3$. Wir setzen daher $z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^{-2}$. Dann erhalten wir für z die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = 2z(x) - 2.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörige homogenen Differentialgleichung $z'(x) = 2z(x)$ ist gegeben durch $z(x) = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$. Durch Variation der Konstanten c lässt sich nun eine spezielle Lösung ermitteln. Wir machen den Ansatz $z(x) = c(x)e^{2x}$ und setzen ihn in die inhomogene Differentialgleichung ein. Damit erhalten wir $c'(x) = -2e^{-2x}$, also $c(x) = e^{-2x}$ und somit $z_p(x) = 1$. Also erhalten wir als allgmeine Lösung

$$z(x) = 1 + ce^{2x} \quad \text{bzw.} \quad y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + ce^{2x}}}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$ impliziert $c = 3$. Somit ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3e^{2x}}}$ die gesuchte Lösung.

Aufgabe 6 (Übung)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Finden Sie in **b)** danach noch die Lösung des Anfangswertproblems.

a) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für eine Lösung der homogenen Gleichung.

b) $y''(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)y'(x) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)y(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ für $x > 0$, $y(1) = y'(1) = -\mathrm{e}^2$.

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für eine Lösung der homogenen Gleichung.

Lösungsvorschlag

a) Durch Einsetzen des Ansatzes in die homogene Gleichung sieht man leicht, dass die Gleichung für $a = 1$ erfüllt ist und somit $u(x) = \mathrm{e}^x$ eine Lösung ist. Nun können wir das Reduktionsverfahren von d'Alembert anwenden, um die allgemeine Lösung zu finden. Der Ansatz $y(x) = w(x)u(x)$ führt auf

$$\begin{aligned} xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y &= x(w''u + 2w'u' + wu'') - (2x+1)(w'u + wu') + (x+1)uw \\ &= x e^x w'' - e^x w' \stackrel{!}{=} (x^2+1)e^x. \end{aligned}$$

D.h. $v := w'$ erfüllt die Gleichung $v' = \frac{1}{x}v + x + \frac{1}{x}$. Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist $v_{\text{hom}}(x) = c\exp\left(\int 1/x \, \mathrm{d}x\right) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung erhalten wir nun mittels Variation der Konstanten, d.h. wir machen den Ansatz $y(x) = c(x)x$. Einsetzen liefert

$$c'(x)x = x + \tfrac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad c'(x) = 1 + \tfrac{1}{x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad c(x) = x - \tfrac{1}{x} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

D.h. $v_p(x) = (x - \frac{1}{x})x = x^2 - 1$ ist ein spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v ist somit gegeben durch

$$v(x) = x^2 - 1 + cx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für w erhalten wir damit $w(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + c_1x^2 + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, und als allgemeine Lösung schließlich

$$y(x) = w(x)u(x) = (\tfrac{1}{3}x^3 - x)e^x + c_1x^2e^x + c_2e^x, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Wir machen zunächst einen Ansatz, um eine nichttriviale Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung zu finden:

$$u(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} u''(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)u'(x) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)u(x) &= \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} - \left(4 + \frac{2}{x}\right)\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + \left(4 + \frac{4}{x}\right)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \frac{1}{x}(4 - 2\lambda)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 + 2\frac{2-\lambda}{x} = (2-\lambda)\left(2 - \lambda + \frac{2}{x}\right) &= 0 \\ \Leftarrow 2 &= \lambda \end{aligned}$$

Also ist $u(x) = e^{2x}$ eine partikuläre Lösung der obigen Differentialgleichung.

Um die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz (Verfahren von d'Alembert) $y(x) = v(x)u(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
&y''(x) - \left(4 + \tfrac{2}{x}\right)y'(x) + \left(4 + \tfrac{4}{x}\right)y(x) \\
&= v''(x)u(x) + 2v'(x)u'(x) + v(t)u''(x) - \left(4 + \tfrac{2}{x}\right)(v(x)u'(x) + v'(x)u(x)) + \left(4 + \tfrac{4}{x}\right)v(x)u(x) \\
&= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) - \left(4 + \tfrac{2}{x}\right)u(x)\right] + v(x)\underbrace{\left[u''(x) - \left(4 + \frac{2}{x}\right)u'(x) + \left(4 + \frac{4}{x}\right)u(x)\right]}_{=0} \\
&= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) + \left(4 - \tfrac{2}{x}\right)u(x)\right] \overset{!}{=} 2\mathrm{e}^{2x} \\
&\overset{u(x)>0}{\Leftrightarrow} v''(x) + v'(x)\left[\underbrace{\frac{2u'(x)}{u(x)}}_{=4} - \left(4 + \tfrac{2}{x}\right)\right] = v''(x) - \tfrac{2}{x}v'(x) \overset{!}{=} 2
\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v'. Es gilt

$$\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x), \qquad \text{sowie} \qquad \int \frac{1}{x^2}2\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{x}.$$

Also ist

$$v'(x) = Cx^2 - 2x$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v'. Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = C_1x^3 - x^2 + C_2$$

als allgemeine Lösung für v. Damit ist

$$y(x) = C_1x^3\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{2x} - x^2\mathrm{e}^{2x}$$

für alle $x > 0$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Für die Lösung des Anfangswertproblems berechnen wir nun noch

$$y'(x) = 2C_1x^3\mathrm{e}^{2x} + (3C_1 - 2)x^2\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x} + 2C_2\mathrm{e}^{2x}$$

und sehen $y(1) = (C_1 + C_2 - 1)\mathrm{e}^2$ sowie $y'(1) = (5C_1 + 2C_2 - 4)\mathrm{e}^2$. Damit die Anfangswerte erfüllt sind, muss nun einerseits $C_1 + C_2 - 1 = -1$, also $C_2 = -C_1$ und zum anderen $5C_1 - 2C_1 - 4 = -1$, also $C_1 = 1$. Somit ist die Lösung gegeben durch

$$y(x) = x^3\mathrm{e}^{2x} - C_2\mathrm{e}^{2x} - x^2\mathrm{e}^{2x}.$$