Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SoSe 2018
10.05.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Tutorium)

Ziel dieser Aufgabe ist es die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \mathrm{e}^{-x}y^2 + y - \mathrm{e}^x \tag{1}$$

zu bestimmen.

a) Nutzen Sie den Ansatz $y_0(x) = \mathrm{e}^{ax}$ für ein $a \in \mathbb{R}$ um eine Lösung y_0 von (1) zu finden.

b) Wir nehmen an, dass die Funktion y ebenfalls eine Lösung von (1) ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $u := y - y_0$ die Bernoullische Differentialgleichung

$$u' = \mathrm{e}^{-x}u^2 + 3u$$

löst und bestimmen die allgemeine Lösung u. Die allgemeine Lösung von (1) ist dann gegeben durch $y = y_0 + u$.

Lösungsvorschlag

a) Zunächst bestimmen wir eine spezielle Lösung der Gleichung mit dem gegebenen Ansatz $y_0(x) = e^{ax}$. Einsetzen liefert

$$(a-1)e^{ax} = e^{(2a-1)x} - e^x,$$

und für $a = 1$ gilt Gleichheit. Somit ist $y_0(x) = e^x$ eine Lösung der Gleichung.

b) Die weiteren Lösungen dieser sogenannten Riccatischen Differentialgleichung bekommen wir nun mit dem Ansatz $u := y - y_0 = y - e^x$. Dieser liefert für die Funktion u die Gleichung

$$u' = y' - y_0' = \mathrm{e}^{-x}y^2 + y - \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^{-x}y_0^2 + y_0 - \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{-x}\underbrace{(y^2 - y_0^2)}_{=u^2+2y_0u} + \underbrace{y - y_0}_{=u} = \mathrm{e}^{-x}(u^2 + 2y_0u) + u = \mathrm{e}^{-x}u^2 + 3u.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir mit $(1-\alpha)u^{-\alpha}$ multiplizieren und anschließend mit $z(x) := u(x)^{1-\alpha} = u(x)^{-1}$ substituieren. Dies führt auf

$$z'(x) = -3z(x) - e^{-x}.$$

Die homogene Gleichung $z'(x) = -3z(x)$ hat die allgemeine Lösung $z_h(x) = ce^{-3x}$, $c \in \mathbb{R}$, und mittels Variation der Konstanten erhalten wir $z_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ als spezielle Lösung der inhomogen Gleichung. Die allgemeine Lösung der Gleichung für z ist damit

$$z(x) = ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Nun ermitteln wir die Nullstellen von z. Aus $z(\xi) = 0$ folgt $e^{2\xi} = 2c$. Für $c \leq 0$ hat z also keine Nullstelle, für $c > 0$ ist $\xi = \frac{\log(2c)}{2}$ die einzige Nullstelle von z.

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir also durch

$$u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{ce^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}}$$

eine Lösung von $u' = 3u + e^{-x}u^2$, wobei $x \in \mathbb{R}$ falls $c \leq 0$ und $x \in (-\infty, \frac{\log(2c)}{2})$ oder $x \in (\frac{\log(2c)}{2}, \infty)$ falls $c > 0$ gilt. Zusammen mit $u \equiv 0$ sind dies alle Lösungen von $u' = 3u + e^{-x}u^2$. Für die ursprüngliche Gleichung haben wir also die Lösungen

$$y_0(x) = e^x \qquad \text{und} \qquad y(x) = e^x + \frac{2}{2ce^{-3x} - e^{-x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

auf den entsprechenden Intervallen $\mathbb{R}$ oder $(-\infty, \frac{\log(2c)}{2})$ bzw. $(\frac{\log(2c)}{2}, \infty)$ je nach Wahl von c.

Aufgabe 2 (Tutorium)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y'(x) - \frac{2}{1-x^2}y(x) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $u(x) = ax$ um eine Lösung der Gleichung zu erhalten. Verwenden Sie anschließend das Verfahren von d'Alembert.

b) Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $p, q\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner seien y_1, y_2 zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Rechnen Sie nach, dass die Wronski-Determinante

$$w(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

die Differentialgleichung $w' = -p(x)w$ löst.

Lösungsvorschlag

a) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Man erkennt, dass $u(x) = x$ eine Lösung ist.

Um die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung zu finden, machen wir den Ansatz (Verfahren von d'Alembert) $y(x) = v(x)u(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
0 = y''(x) + \frac{2x}{1-x^2}y'(x) - \frac{2}{1-x^2}y(x) &= v''(x)u(x) + 2v'(x)u'(x) + v(x)u''(x) + \\
&\quad \frac{2x}{1-x^2}(v'(x)u(x) + v(x)u'(x)) - \\
&\quad \frac{2}{1-x^2}v(x)u(x) \\
&= v''(x)u(x) + v'(x)\left[2u'(x) + \frac{2x}{1-x^2}u(x)\right] + \\
&\quad v(x)\underbrace{\left[\frac{2x}{1-x^2} - \frac{2}{1-x^2}u(x)\right]}_{=0} \\
\overset{x>0}{\Leftrightarrow} v''(x) + 2v'(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x^2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v'. Es gilt

$$\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x) \text{ und } \int \frac{2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x^2)$$

auf $I = (0,1)$. Damit ist $v'(x) = C\frac{1-x^2}{x^2} = C\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v'. Unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = C_1\left(\frac{1}{x} + x\right) + C_2$$

als allgemeine Lösung für v. Damit ist $y(x) = C_1(1+x^2) + C_2 x$ für alle $0 < x < 1$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
Bemerkung: Der Lösungsraum der gegebenen linearen Differentialgleichung 2.Ordnung ist zweidimensional. Die Lösungen $y_1(x) := x$ und $y_2(x) := x^2 + 1$ sind linear unabhängig und bilden daher ein Fundamentalsystem, d.h. es handelt sich um eine Basis des Lösungsraums. Die lineare Unabhängigkeit lässt sich zum Beispiel mit Hilfe der Wronski-Determinante w zeigen:

$$w(\tfrac{1}{2}) = \det\begin{pmatrix} y_1(\frac{1}{2}) & y_2(\frac{1}{2}) \\ y_1'(\frac{1}{2}) & y_2'(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} \neq 0$$

und somit bilden y_1 und y_2 laut Vorlesung ein Fundamentalsystem.

b) Da y_1 und y_2 Lösungen der gegebenen Differentialgleichung sind, erfüllt die Wronski-Determinante $w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
w'(x) &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) \\
&= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\
&= y_1(x)\big(-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)\big) - y_2(x)\big(-p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)\big) \\
&= -p(x)\big(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) \\
&= -p(x)w(x).
\end{aligned}$$