Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SoSe 2018
24.05.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Tutorium)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

a) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x + 6\mathrm{e}^{-x}$

und lösen Sie das Anfangswertproblem

b) $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}\sin(x), \quad y(0) = \frac{3}{5}, \quad y'(0) = 1.$

Lösungsvorschlag

Bei allen Aufgabenteilen handelt es sich um (homogene bzw. inhomogene) lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Für die jeweilige homogene Gleichung machen wir hier stets den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

a) Um die vorliegende inhomogene Gleichung zu lösen, berechnen wir zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und machen anschließend einen *Ansatz vom Typ der rechten Seite*. Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung ist

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3,$$

d.h. wir haben die dreifache Nullstelle $\lambda = -1$. Als Fundamentalsystem erhalten wir damit

$$\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$$

und als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Bei inhomogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Inhomogenität $p(x)e^{\sigma x}\cos(\omega x)$ oder $p(x)e^{\sigma x}\sin(\omega x)$ können wir eine spezielle Lösung mit dem Ansatz

$$y_p(x) = q_1(x)x^k e^{\sigma x}\cos(\omega x) + q_2(x)x^k e^{\sigma x}\sin(\omega x)$$

finden, wobei q_1 und q_2 Polynome von gleichem Grad wie p sind und k die Vielfachheit der Nullstelle $\sigma + i\omega$ im charakteristischen Polynom ist (d.h. der Ausdruck x^k in obigem Ansatz fällt weg, falls $\sigma + i\omega$ keine Nullstelle ist). Tritt nun eine *Summe* aus Inhomogenitäten der obigen Form auf, so bilden wir die *Summe* der jeweiligen Ansätze. Ein Ansatz dieser Art heißt *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

In unserem Fall wählen wir also den Ansatz: $y_p(x) = ax + b + cx^3 e^{-x}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hier gilt

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= a + ce^{-x}(-x^3 + 3x^2), \\ y_p''(x) &= ce^{-x}(x^3 - 6x^2 + 6x), \\ y_p'''(x) &= ce^{-x}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$y_p'''(x) + 3y_p''(x) + 3y_p'(x) + y_p(x) = ax + (3a + b) + 6ce^{-x} \stackrel{!}{=} x + 6e^{-x},$$

d.h. mit $a = 1, b = -3, c = 1$ erhalten wir $y_p(x) = x - 3 + x^3 e^{-x}$ als spezielle Lösung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = x - 3 + x^3 e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Wie bei Teilaufgabe a) berechnen wir zuerst die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die homogene Gleichung $y'' - 2y' + 2y = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$$

mit den einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet somit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Als Ansatz für eine spezielle Lösung machen wir hier den Ansatz

$$y_p(x) = ae^{2x} \cos(x) + be^{2x} \sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (2a + b)e^{2x} \cos(x) + (-a + 2b)e^{2x} \sin(x), \\ y_p''(x) &= (3a + 4b)e^{2x} \cos(x) + (-4a + 3b)e^{2x} \sin(x). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert dann

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = (a + 2b)e^{2x} \cos(x) + (-2a + b)e^{2x} \sin(x) \stackrel{!}{=} e^{2x} \sin(x) \iff a + 2b = 0 \wedge -2a + b = 1.$$

Als Lösung erhalten wir daraus $a = -\frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}$ und damit $y_p(x) = -\frac{2}{5}e^{2x} \cos(x) + \frac{1}{5}e^{2x} \sin(x)$, sowie

$$y(x) = -\tfrac{2}{5}e^{2x} \cos(x) + \tfrac{1}{5}e^{2x} \sin(x) + c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Zur Lösung des Anfangswertproblems leiten wir zunächst ab und erhalten

$$y'(x) = \tfrac{4}{5}e^{2x} \sin(x) - \tfrac{3}{5}e^{2x} \cos(x) + (-c_1 + c_2)e^x \sin(x) + (c_1 + c_2)e^x \cos(x).$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen führt uns schließlich auf

$$y(0) = \tfrac{3}{5} \iff c_1 - \tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} \iff c_1 = 1,$$

und

$$y'(0) = 1 \iff -\tfrac{3}{5} + (1 + c_2) = 1 \iff c_2 = \tfrac{3}{5}.$$

Die Lösung ist damit gegeben durch

$$y(x) = \tfrac{1}{5}e^{2x}\Big(\sin(x) - 2\cos(x)\Big) + \tfrac{1}{5}e^{x}\Big(3\sin(x) + 5\cos(x)\Big).$$

Aufgabe 2 (Tutorium)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' - y'' + y' - y = \frac{e^x}{2}$$

mit $y(0) = 3, y'(0) = \frac{1}{4}$ und $y''(0) = \frac{3}{2}$.

Lösungsvorschlag

Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom p lautet:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Eine Nullstelle $\lambda_1 = 1$ von p kann erraten werden. Polynomdivision liefert:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

Damit sind $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ die verbleibenden Nullstellen von p. Alle Nullstellen haben die Vielfachheit 1. Die Funktionen y_1, y_2 und y_3 mit

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = \cos(x), \qquad y_3 = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ bilden also ein Fundamentalsystem für die obige Differentialgleichung (vgl. Vorlesung). Wir suchen eine partikuläre Lösung y_p für die Inhomogenität $\frac{e^x}{2}$. Dafür machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“ (siehe Vorlesung):

$$y_p(x) = Cxe^x$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C(x+1)e^x, \\ y_p''(x) &= C(x+1+1)e^x = (x+2)e^x, \\ y_p'''(x) &= C(x+3)e^x \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} y_p'''(x) - y_p''(x) + y_p'(x) - y_p(x) &= \frac{e^x}{2} \\ \overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} C((x+3) - (x+2) + (x+1) - x) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2C &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Damit ist $y_p(x) = \frac{x}{4}e^x$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + y_p(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit freien Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Diese werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \left[C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) + \frac{x}{4}e^x\right]_{x=0} = C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} 3, \\
\Rightarrow C_2 &= 3 - C_1, \\
y'(0) &= \left[C_1 e^x - C_2 \sin(x) + C_3 \cos(x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right)e^x\right]_{x=0} = C_1 + C_3 + \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow C_1 + C_3 &= 0 \Rightarrow C_3 = -C_1, \\
y''(0) &= \left[C_1 e^x - C_2 \cos(x) - C_3 \sin(x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{2}{4}\right)e^x\right]_{x=0} = C_1 - C_2 + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow C_1 - C_2 &= 1 \Rightarrow 2C_1 - 3 = 1 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow C_2 = 1, C_3 = -2
\end{aligned}$$

Also ist $y(x) = \cos(x) - 2\sin(x) + \left(\frac{x}{4} + 2\right)e^x$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 3 (Übung)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' + y' - 12y = 6x^2 - 7x + 4$,

b) $y'' - 4y' + 4y = 8\sin(2x)$,

c) $y''' - 2y'' + y' - 2y = -10\cos x$.

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet $\lambda^2 + \lambda - 12$. Damit ist

$$y_h(x) = Ae^{-4x} + Be^{3x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung. Um nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, verwenden wir den Ansatz $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$-12ax^2 + (2a - 12b)x + (2a + b - 12c) = 6x^2 - 7x + 4.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich die gesuchten Konstanten $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = -\frac{3}{8}$. Die allgemeine Lösung lautet schließlich

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-4x} + Be^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}).$$

b) Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Damit ist

$$y_h(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung. Um nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, verwenden wir den Ansatz $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$8a\sin(2x) - 8b\cos(2x) = 8\sin(2x).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich die gesuchten Konstanten $a = 1$ und $b = 0$. Die allgemeine Lösung lautet schließlich

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + \cos(2x) \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}).$$

c) Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung lautet

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - i)(\lambda + i).$$

Damit ist

$$y_h(x) = Ae^{2x} + B\sin x + C\cos x \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

Lösung der homogenen Gleichung. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, mache wir den Ansatz

$$y_p(x) = x(a\cos x + b\sin x) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und anschließender Koeffizientenvergleich liefert $a = 1$ und $b = 2$, also $y_p(x) = x(\cos x + 2\sin x)$. Die allgemeine Lösung ist daher gegeben durch

$$Ae^{2x} + B\sin x + C\cos x + x(\cos x + 2\sin x) \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B, C \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4 (Übung)

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme

a) $x^2y'' + y = 0, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1,$

b) $x^2y'' + xy' - y = \ln x, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1,$

c) $x^2y^{(4)} + 5xy''' + y'' + \frac{2y'}{x} - \frac{2y}{x^2} = 0, \quad y(e) = 0,\ y'(e) = -1,\ y''(e) = -\frac{1}{e},\ y'''(e) = \frac{1}{e^2}.$

Lösungsvorschlag

a) Wir verwenden den Ansatz $x = e^t$ und erhalten durch Einsetzen:

$$e^{2t}y''(e^t) + y(e^t) = 0.$$

Wir setzen $z(t) := y(e^t)$. Dann gilt $z'(t) = e^ty'(e^t)$ und $z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t)$. Damit erhalten wir die DGL

$$z'' - z' + z = 0$$

für z. Diese homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - \lambda + 1$, also erhalten wir die allgemeine Lösung

$$z(t) = Ae^{\frac{t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) + Be^{\frac{t}{2}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t) \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = z(\ln x) = A\sqrt{x}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + B\sqrt{x}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x) \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt schließlich die Lösung

$$y(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \ln x) \quad (x > 0).$$

b) Wir verwenden den Ansatz $x = e^t$ und erhalten durch Einsetzen:

$$e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t) - y(e^t) = t.$$

Wir setzen $z(t) := y(e^t)$. Dann gilt $z'(t) = e^t y'(e^t)$ und $z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)$. Damit erhalten wir die DGL

$$z'' - z = t$$

für z. Diese inhomogene lineare DGL 2. Ordnung konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 1$, also erhalten wir die allgemeine Lösung

$$z(t) = Ae^t + Be^{-t} - t \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

(Für die partikuläre Lösung können wir den Ansatz von Typ der Seite verwenden: $y_p(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich liefert dann $a = -1$, $b = 0$ und somit $y_p(t) = -t$.)
Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = z(\ln x) = Ax + Bx^{-1} - \ln x \quad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt schließlich die Lösung

$$y(x) = x + x^{-1} - \ln x \quad (x > 0).$$

c) Multiplizieren der DGL mit x^2 liefert die Euler'sche DGL

$$x^4 y^{(4)} + 5x^3 y''' + x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

Wir verwenden wieder den Ansatz $x = e^t$ und erhalten durch Einsetzen:

$$e^{4t} y^{(4)}(e^t) + 5e^{3t} y'''(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + 2e^t y'(e^t) - 2y(e^t) = 0.$$

Wir setzen $z(t) := y(e^t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
z'(t) &= e^t y'(e^t), \\
z''(t) &= e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t), \\
z'''(t) &= e^{3t} y'''(e^t) + 3e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t), \\
z^{(4)} &= e^{4t} y^{(4)}(e^t) + 6e^{3t} y'''(e^t) + 7e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die DGL

$$z^{(4)} - z''' - 3z'' + 5z' - 2z = 0$$

für z. Diese inhomogene lineare DGL 2. Ordnung konstanten Koeffizienten hat das charakteristische Polynom $\lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)$, also erhalten wir die allgemeine Lösung

$$z(t) = Ae^t + Bte^t + Ct^2 e^t + De^{-2t} \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}).$$

Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = z(\ln x) = Ax + Bx\ln x + Cx(\ln x)^2 + Dx^{-2} \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt schließlich die Lösung

$$y(x) = x - x\ln x = x(1 - \ln x) \quad (x > 0).$$