Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SoSe 2018
05.06.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Übung)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = x^2y^2 - 1, \qquad y(0) = 1.$$

Wenden Sie den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ an und bestimmen Sie die ersten sechs Koeffizienten c_j für $j = 0, \ldots, 5$.

Lösungsvorschlag

Wir machen einen Potenzreihenansatz, d.h. es gilt

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j, \qquad \text{sowie} \qquad y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1}.$$

Aufgrund des Anfangswertes ergibt sich

$$y(0) = c_0 \stackrel{!}{=} 1.$$

Ferner, erhalten wir mit dem Cauchyprodukt für Reihen

$$x^2y^2 = x^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \right) = x^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{j} c_l c_{j-l} \right) x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{j} c_l c_{j-l} \right) x^{j+2}.$$

Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu $y' - x^2y^2 + 1 = 0$. Einsetzen der Darstellungen von y' und x^2y^2 führt zu

$$\sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} - \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{j} c_l c_{j-l} \right) x^{j+2} + 1 = 0.$$

Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs bestimmen wir die Koeffizienten c_j für $j = 1,\dots,5$:

$$
\begin{aligned}
&x^0: \quad 1\cdot c_1 - 0 + 1 \overset{!}{=} 0 && \Rightarrow c_1 = -1.\\
&x^1: \quad 2\cdot c_2 - 0 + 0 \overset{!}{=} 0 && \Rightarrow c_2 = 0.\\
&x^2: \quad 3\cdot c_3 - \underbrace{c_0\cdot c_0}_{=1} + 0 \overset{!}{=} 0 && \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}.\\
&x^3: \quad 4\cdot c_4 - \underbrace{c_0\cdot c_1}_{=-1} - \underbrace{c_1\cdot c_0}_{=-1} + 0 \overset{!}{=} 0 && \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{2}.\\
&x^4: \quad 5\cdot c_5 - \underbrace{c_0\cdot c_2}_{=0} - \underbrace{c_1\cdot c_1}_{=1} - \underbrace{c_2\cdot c_0}_{=0} + 0 \overset{!}{=} 0 && \Rightarrow c_5 = \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

Dies liefert

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$$

Aufgabe 2 (Übung)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

welches mit einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ gelöst werden kann.

a) Zeigen Sie für die Koeffizienten c_j die Rekursionsformel

$$c_{j+2} = -\frac{1}{j+2}c_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten explizit gegeben sind durch

$$c_j = \begin{cases} 0, & j = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ \dfrac{(-1)^k}{2^k \cdot k!}, & j = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems in geschlossener Form an.

Lösungsvorschlag

a) Wir machen einen Potenzreihenansatz, d.h. es gilt

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j, \qquad y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1}, \qquad y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j x^{j-2}.$$

Durch die Anfangswerte ergibt sich unmittelbar

$$
\begin{aligned}
y(0) &= c_0 \overset{!}{=} 1 \quad \text{und}\\
y'(0) &= c_1 \overset{!}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\begin{aligned}
0 &= y'' + xy' + y \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j x^{j-2} + \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)c_{j+2} x^j + \sum_{j=0}^{\infty} j c_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[(j+2)(j+1)c_{j+2} + (j+1)c_j\Big] x^j \\
&\Leftrightarrow (j+2)(j+1)c_{j+2} + (j+1)c_j = 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0 \\
&\Leftrightarrow (j+2)c_{j+2} + c_j = 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0 \\
&\Leftrightarrow c_{j+2} = \frac{-c_j}{j+2} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Rekursionsformel und c_0=1, c_1=0 ergibt sich

$$\begin{aligned}
j = 0: &\quad c_2 = -\frac{1}{2} = \frac{(-1)^1}{2^1 \cdot 1!} \\
j = 1: &\quad c_3 = -\frac{1}{3}0 = 0 \\
j = 2: &\quad c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = \frac{1}{8} = \frac{(-1)^2}{2^2 \cdot 2!} \\
j = 3: &\quad c_5 = 0 \\
j = 4: &\quad c_6 = -\frac{1}{6}c_4 = -\frac{1}{6 \cdot 8} = \frac{(-1)^3}{2^3 \cdot 3!} \\
j = 5: &\quad c_7 = 0 \\
j = 6: &\quad c_8 = -\frac{1}{8}c_6 = \frac{1}{8 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{(-1)^4}{2^4 \cdot 4!}.
\end{aligned}$$

Dies legt die Vermutung

$$c_j = \begin{cases} 0, & j = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ \dfrac{(-1)^k}{2^k \cdot k!}, & j = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

nahe. Wir wollen diese Aussage mit vollständiger Induktion beweisen. Für $j = 0$ gilt $c_j = 1 = \frac{(-1)^0}{2^0 \cdot 0!}$ und $j = 1$ ist $c_j = 0$, d.h. die Aussage ist korrekt für $j = 0$ und $j = 1$. Somit ist der Induktionsanfang gemacht. Sei nun $j = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $c_j = 0$. Dann folgt direkt aus der Rekursionsformel

$$c_{j+2} = \frac{-c_j}{j+2} = 0.$$

Sei hingegen $j = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $c_j = \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!}$, so ist

$$c_{j+2} = \frac{-c_j}{j+2} = \frac{-\frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!}}{2k+2} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k \cdot k! 2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1} \cdot (k+1)!}$$

und somit ist die explizite Darstellung der c_j bewiesen.

c) Mit Aufgabenteil b) gilt

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$