

HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 5. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 1 (TUTORIUM)

- a) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie die sukzessiven Approximationen $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ aus der Fixpunktiteration für $n = 1, 2, 3$.

- b) Zeigen Sie mit dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + xy^2, \quad y(0) = 0,$$

eindeutig lösbar ist. Berechnen Sie die sukzessiven Approximationen y_n aus der Fixpunktiteration für $n = 1, 2, 3$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(t, x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Dann ist F für jedes $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ stetig partiell nach allen Variablen differenzierbar. Somit ist das gegebene Anfangswertproblem nach Picard-Lindelöf eindeutig lösbar. Die Picard-Iteration ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -y_n(s) \\ x_n(s) \end{pmatrix} ds \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 1 - \frac{s^2}{2} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} \\ t - \frac{t^3}{3!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach einem Hinweis in der Vorlesung konvergiert diese Folge nun auf einer kleinen Umgebung der 0 (gleichmäßig) gegen die tatsächliche Lösung.

- b) Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x, y) = x^2 + xy^2$. Dann ist F für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ stetig partiell nach y differenzierbar mit

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2xy \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist das gegebene Anfangswertproblem demnach eindeutig lösbar. Die Picard-Iteration ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_{n+1}(x) &= \int_0^x t^2 + t y_n^2(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}, \\ y_2(x) &= \int_0^x t^2 + \frac{t^7}{9} dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{72}, \\ y_3(x) &= \int_0^x t^2 + t \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^8}{72} \right)^2 dt = \int_0^x t^2 + \frac{t^7}{9} + \frac{t^{12}}{108} + \frac{t^{17}}{5184} dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{72} + \frac{x^{13}}{1404} + \frac{x^{18}}{93312}. \end{aligned}$$

Nach einem Hinweis in der Vorlesung konvergiert diese Folge nun auf einer kleinen Umgebung der 0 (gleichmäßig) gegen die tatsächliche Lösung.

AUFGABE 2 (TUTORIUM)

Betrachten Sie die folgenden Systeme linearer Differentialgleichungen auf $(0, \infty)$. Verwenden Sie jeweils das gegebene Fundamentalsystem Φ um die allgemeine Lösung $\vec{y} = (u, v)$ des Systems mit Hilfe der Methode *Variation der Konstanten* zu finden.

a) $u' = -\frac{2v}{x^2} + x, v' = -u + 1, \quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} -2x & \frac{1}{x^2} \\ x^2 & \frac{1}{x} \end{pmatrix},$

b) $xu' = u + 2v + x \cos(x), xv' = -u - 2v, \quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}.$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Es handelt sich jeweils um ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung, also

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x),$$

wobei $A(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine 2×2 -Matrix ist. Wenn ein Fundamentalsystem Φ bekannt ist, so ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x) \int \Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) dx.$$

Für eine 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Inverse gegeben durch $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, falls $ad - bc \neq 0$. Zusammen mit der homogenen Lösung ergibt sich dann die allgemeine Lösung der Gleichung.

a) Es gilt

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{x^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem ist laut Aufgabenstellung gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} -2x & \frac{1}{x^2} \\ x^2 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\Phi(x)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} - 1 \\ x^3 + 2x \end{pmatrix}.$$

Ein Integral davon ist gegeben durch

$$\int \Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) \, dx = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} - x \\ \frac{x^4}{4} + x^2 \end{pmatrix}$$

und eine partikuläre Lösung somit durch

$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x) \int \Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) \, dx = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3x^2}{4} \\ -\frac{x^3}{4} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Fundamentalsystem ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} -2c_1x + \frac{c_2}{x^2} + 1 + \frac{3x^2}{4} \\ c_1x^2 + \frac{c_2}{x} - \frac{x^3}{4} \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

b) Es gilt

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{2}{x} \\ -\frac{1}{x} & -\frac{2}{x} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem ist laut Aufgabenstellung gegeben durch

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\Phi(x)^{-1} = -2x \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -x & -2x \end{pmatrix}$$

und somit

$$\Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 2 \cos(x) \\ -x \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Ein Integral davon ist gegeben durch

$$\int \Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) dx = \begin{pmatrix} 2 \sin(x) \\ -x \sin(x) - \cos(x) \end{pmatrix}$$

und eine partikuläre Lösung somit durch

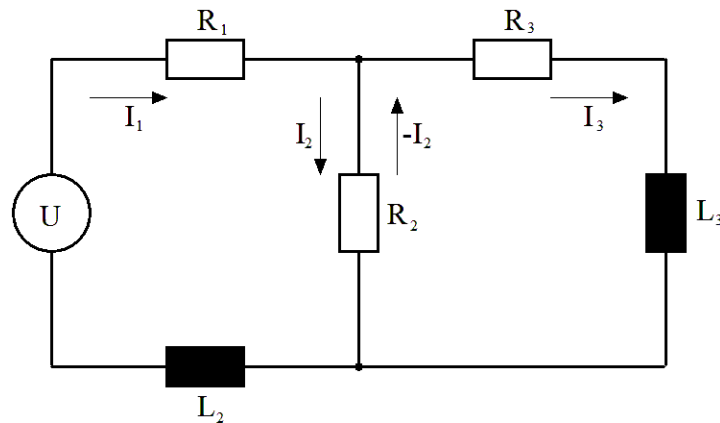
$$\vec{y}_p(x) = \Phi(x) \int \Phi(x)^{-1} \vec{b}(x) dx = \begin{pmatrix} \sin(x) - \frac{\cos(x)}{x} \\ \frac{1}{x} \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Fundamentalsystem ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{c_2}{x} + \sin(x) - \frac{\cos(x)}{x} \\ -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{x} + \frac{1}{x} \cos(x) \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

AUFGABE 3 (TUTORIUM)

Wir betrachten das folgende RL -Netzwerk:



Bestimmen Sie unter Verwendung der Kirchhoff'schen Regeln ein Differentialgleichungssystem für die Ströme I_2 und I_3 . Lösen Sie anschließend dieses System unter den Anfangsbedingungen $I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$ und mit den Größen $R_1 = R_2 = R_3 = 10$, $L_2 = L_3 = 10 H$, $U = 10 \sin(t) V$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Nach den Kirchhoff'schen Regeln gilt

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3, \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + L_2 I_1' &= U, \\ R_3 I_3 + L_3 I_3' - R_2 I_2 &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite und Umformen der zweiten und dritten nach I_2' bzw. nach I_3' liefert

$$\begin{aligned} I_2' &= \frac{U}{L_2} - \left(\frac{R_1}{L_2} + \frac{R_2}{L_2} + \frac{R_2}{L_3} \right) I_2 + \left(\frac{R_3}{L_3} - \frac{R_1}{L_2} \right) I_3, \\ I_3' &= \frac{R_2}{L_3} I_2 - \frac{R_3}{L_3} I_3. \end{aligned}$$

Setzen wir nun die gegebenen Größen ein, so erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} I_2' &= -3I_2 + \sin(t), & I_2(0) &= 0, \\ I_3' &= I_2 - I_3, & I_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Eine einfache Methode, dieses System zu lösen, wäre wohl die Eliminationsmethode anzuwenden. (Im konkreten Fall könnten wir die Lösung I_2 der ersten Differentialgleichung bestimmen und diese Lösung anschließend in die zweite Gleichung einsetzen. Schließlich könnten wir die Lösung I_3 der zweiten Differentialgleichung ermitteln.) Die Eigenwertmethode ist hier ein wenig aufwändiger, wie wir im Folgenden sehen werden. Die zum obigen System gehörige Matrix ist $A := \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -1$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\begin{aligned} \text{Kern}(A + 3I) &= \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \text{Kern}(A + I) &= \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} & 0 \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu erhalten, wollen wir nun noch die 'Variation der Konstanten'-Formel anwenden. Mit

$$\Phi(s)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3s} & 0 \\ e^s & 2e^s \end{pmatrix}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \vec{I}_p(t) &= \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} \sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds = \frac{1}{2} \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} e^{3s} \sin(s) \\ e^s \sin(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} \Phi(t) \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{10} e^{3s} (3 \sin(s) - \cos(s)) \right]_0^t \\ \left[\frac{1}{2} e^s (\sin(s) - \cos(s)) \right]_0^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Phi(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{10} e^{3t} (3 \sin(t) - \cos(t)) + \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} e^t (\sin(t) - \cos(t)) + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} e^{-3t} + \frac{3}{10} \sin(t) - \frac{1}{10} \cos(t) \\ \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{20} e^{-3t} + \frac{1}{10} \sin(t) - \frac{1}{5} \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies führt auf die Lösung

$$\vec{I}(t) = \begin{pmatrix} I_2(t) \\ I_3(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{I}_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} e^{-3t} + \frac{3}{10} \sin(t) - \frac{1}{10} \cos(t) \\ \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{20} e^{-3t} + \frac{1}{10} \sin(t) - \frac{1}{5} \cos(t) \end{pmatrix},$$

sowie $I_1(t) = I_2(t) + I_3(t) = \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{20} e^{-3t} + \frac{2}{5} \sin(t) - \frac{3}{10} \cos(t)$.

AUFGABE 4 (ÜBUNG)

Berechnen Sie explizit die Matrixexponentialfunktionen zu den folgenden Differentialgleichungssystemen.

a) $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

b) $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}.$

Lösen Sie daraufhin das Anfangswertproblem a).

LÖSUNGSVORSCHLAG

- a) Definieren wir $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt $A = 2I + B$. Außerdem haben wir $B^2 = 0$ und somit auch $B^k = 0$ für $k \geq 2$. Wegen $(2I)B = B(2I)$ folgt

$$e^{tA} = e^{2tI} e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich

$$\vec{y}(t) = e^{tA} \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- b) Für das charakteristische Polynom p_A von A gilt

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 4\lambda + 8 \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Seine Nullstellen sind also

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{4-8} = 2 + 2i, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2 - 2i.$$

Wir bestimmen einen Eigenvektor $\vec{v}_1$ zu λ_1 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1-2i & 5 \\ -1 & 1-2i \end{pmatrix} \cdot (-1+2i) &\sim \begin{pmatrix} 5 & -5+10i \\ -1 & 1-2i \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1+2i \\ -1 & 1-2i \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1+2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach der Vorlesung bilden

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1(t) &= \operatorname{Re}(e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1) = \operatorname{Re}\left(e^{2t}(\cos(2t) + i \sin(2t)) \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2 \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_2(t) &= \operatorname{Im}(e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1) = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(2t) - 2 \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = (\vec{\phi}_1 \quad \vec{\phi}_2)$ für $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$. Es gilt

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Inverse $[\Phi(0)]^{(-1)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow_+]{\cdot(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\leftarrow_+} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow [\Phi(0)]^{(-1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach der Vorlesung ist aber

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \Phi(t)[\Phi(0)]^{(-1)} = \frac{e^{2t}}{2} \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \left(\cos(2t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin(2t)}{2} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

AUFGABE 5 (ÜBUNG)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} -15 & -24 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Wir berechnen zunächst ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$, wobei wir $A := \begin{pmatrix} -15 & -24 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ gesetzt haben. Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 15 & 24 \\ -8 & \lambda - 13 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)$$

Die Eigenwerte von A sind daher $\lambda_1 = -3$ (mit Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 1$ (mit Vielfachheit 1). Der Eigenraum zu λ_1 ist

$$E_A(-3) = \text{Kern}(-3I - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

d.h. die erste Fundamentallösung ist

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zu λ_2 ist gegeben durch

$$E_A(1) = \text{Kern}(I - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

welcher eindimensional ist daher zunächst nur eine weitere Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

liefert. Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} & 3e^t \\ -e^{-3t} & -2e^t \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit

$$\vec{y}_{\text{hom}}(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \vec{\phi}_1(t) + c_2 \vec{\phi}_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung $\vec{y}_p$ der inhomogenen Gleichung lässt sich nun mit Variation der Konstanten bestimmen. Nach Vorlesung gilt

$$\vec{y}_p(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \vec{b}(s) \, ds.$$

Mit

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{\det \Phi(t)} \begin{pmatrix} -2e^t & -3e^t \\ e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} & 3e^{3t} \\ -e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) := \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned} \vec{y}_p(t) &= \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \vec{b}(s) \, ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{4s} \\ -1 \end{pmatrix} \, ds = \Phi(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{4t} - \frac{1}{2} \\ -t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t - e^{-3t} - 3te^t \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t} + 2te^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_p(t) + \vec{y}_{\text{hom}}(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{-3t} - 3te^t \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-3t} + 2te^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-3t} & 3e^t \\ -e^{-3t} & -2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff c_1 = -1, c_2 = 1.$$

Und als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir schließlich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-3t} - 3te^t \\ -\frac{5}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-3t} + 2te^t \end{pmatrix}.$$