

HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 6. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 1 (TUTORIUM)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$3 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + 2 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sin(2x - 3t), \quad x, t \in \mathbb{R},$$

$$u(x, 0) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Das gegebene Anfangswertproblem lässt sich in der Form eines linearen Transportproblems äquivalent schreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \underbrace{\frac{3}{2}}_{=:a} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2} \sin(2x - 3t) =: g(x, t), \quad x, t \in \mathbb{R},$$

$$u(x, 0) = xe^x =: f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die partielle Differentialgleichung lässt sich umschreiben zu

$$\frac{\partial u}{\partial \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\nabla u)(x, t) = \frac{1}{2} \sin(2x - 3t).$$

Somit ist die Richtungsableitung von u in Richtung $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ durch die rechte Seite gegeben. Dies ist die Ableitung entlang einer Gerade mit Steigung $\frac{3}{2}$, weshalb es anschaulich Sinn macht, dass dies die Ableitung einer Funktion ist, die von einem Parameter abhängt, der diese Gerade beschreibt, nämlich

$$w(s) = u\left(x + \frac{3}{2}s, t + s\right),$$

für beliebige aber feste $x, t \in \mathbb{R}$. Denn nach mehrdimensionaler Kettenregel gilt

$$w'(s) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(x + \frac{3}{2}s, t + s\right) \cdot \frac{3}{2} + \frac{\partial u}{\partial t}\left(x + \frac{3}{2}s, t + s\right) \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}\left(x + \frac{3}{2}s, t + s\right) = \frac{1}{2} \sin(2x - 3t).$$

Daraus folgt

$$u(x, t) - u\left(x - \frac{3}{2}t, 0\right) = w(0) - w(-t) = \int_{-t}^0 w'(s) \, ds = \int_{-t}^0 \frac{1}{2} \sin(2x - 3t) \, ds = \frac{t}{2} \sin(2x - 3t)$$

Wegen $u(x - \frac{3}{2}t, 0) = f(x - \frac{3}{2}t) = (x - \frac{3}{2}t)e^{x - \frac{3}{2}t}$ folgt schließlich

$$u(x, t) = \frac{t}{2} \sin(2x - 3t) + (x - \frac{3}{2}t)e^{x - \frac{3}{2}t}$$

für alle $x, t \in \mathbb{R}$ als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

AUFGABE 2 (TUTORIUM)

a) Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -xe^y, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= x + 1, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{x}, t) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(\vec{x}, t) + \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{x}, t) &= t^2(x - y + z), & \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, \\ u(\vec{x}, 0) &= e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}}, & \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

a) Wir ersetzen formal y gegen t . Dann lautet das gegebene Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \underbrace{(-1)}_{=:a} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= xe^t =: g(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= x + 1 =: f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Seine Lösung ist nach der Vorlesung durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - ta) + \int_0^t g(x - (t - \tau)a, \tau) d\tau \\ &= (x + t) + 1 + \int_0^t (x + (t - \tau))e^\tau d\tau \\ &= x + t + 1 + (x + t)[e^\tau]_{\tau=0}^t - \int_0^t \underbrace{\tau}_u \underbrace{e^\tau}_{v'} d\tau \\ &\stackrel{\text{Part. Int.}}{=} 1 - (x + t)e^t - [\tau e^\tau]_{\tau=0}^t + \int_0^t e^\tau d\tau \\ &= 1 + (x + t)e^t - te^t + e^t - 1 \\ &= xe^t + e^t \end{aligned}$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

b) Es liegt das lineare Transportproblem

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(\vec{x}, t)}_{=: \vec{a}} = t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}}_{=: \vec{b}} =: g(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R},$$

$$u(\vec{x}, 0) = e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} =: f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

vor. Seine Lösung ist nach der Vorlesung durch

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= f(\vec{x} - t\vec{a}) + \int_0^t g(\vec{x} - (t - \tau)\vec{a}, \tau) d\tau \\ &= e^{-\frac{(x-t)^2 + (y-2t)^2 + (z-t)^2}{2}} + \int_0^t \tau^2 \vec{b} \cdot (\vec{x} - (t - \tau)\vec{a}) d\tau \\ &= e^{-\frac{(x-t)^2 + (y-2t)^2 + (z-t)^2}{2}} + \int_0^t \tau^2 \vec{b} \cdot \vec{x} d\tau - \int_0^t \tau^2 (t - \tau) \underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{a})}_{=0} d\tau \\ &= e^{-\frac{(x-t)^2 + (y-2t)^2 + (z-t)^2}{2}} + \frac{1}{3} t^3 (x - y + z) \end{aligned}$$

für alle $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

AUFGABE 3 (ÜBUNG)

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Wärmeleitungsproblems mit einem Separationsansatz:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) &= 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ \partial_x u(0, t) = \partial_x u(1, t) &= 0 & \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos(\pi x), & \text{für } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Der Ansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$ mit $v, w \neq 0$ (u erfüllt sonst die Randbedingung nicht), liefert uns

$$v(x)w'(t) - v''(x)w(t) = 0 \iff \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte nur von t abhängt, sie aber für alle x, t übereinstimmen, hängen beide Ausdrücke weder von x noch von t ab. Also existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \frac{v''(x)}{v(x)} &= \lambda \iff v''(x) = \lambda v(x), \\ \frac{w'(t)}{w(t)} &= \lambda \iff w'(t) = \lambda w(t). \end{aligned}$$

Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen haben die allgemeinen Lösungen

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad \text{und} \quad w(t) = c_3 e^{\lambda t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Hier kann man auch bereits $\lambda = 0$ ausschließen, da sonst $u(x, 0) = \cos(\pi x)$ nicht erfüllt sein könnte. Aus den Randbedingungen $\partial_x u(0, t) = \partial_x u(1, t) = 0$ folgt $v'(0) = v'(1) = 0$. Mit

$$v'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda} x} - c_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} v'(0) = \sqrt{\lambda}(c_1 - c_2) = 0 &\iff c_1 = c_2, \\ v'(1) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 &\iff e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \\ &\iff 2\sqrt{\lambda} = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\iff \lambda = -\pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen

$$v_n(x) = c_1 e^{\pi i n x} + c_1 e^{-\pi i n x} = 2c_1 \cos(\pi n x), \quad w_n(t) = c_3 e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

Aufsummieren liefert die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) w_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) e^{-\pi^2 n^2 t}.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = \cos(\pi x)$ erhalten wir nach Koeffizientenvergleich $a_1 = 1$ und $a_n = 0$ sonst. Insgesamt führt dies auf die Lösung

$$u(x, t) = \cos(\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

AUFGABE 4 (ÜBUNG)

Betrachten Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = -1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Setzen Sie den wandernden Wellen-Ansatz $u(x, t) = y(x - ct)$ mit Wellengeschwindigkeit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in die gegebene Gleichung ein um eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Profilfunktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ herzuleiten. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung um möglichst viele Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu finden.

LÖSUNGSVORSCHLAG

Wir verwenden den wandernden Wellen-Ansatz $u(x, t) = y(x - ct)$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \partial_t (y(x - ct)) = -cy'(x - ct), \\ \partial_{xx} u(x, t) &= \partial_{xx} (y(x - ct)) = y''(x - ct). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Wärmeleitungsgleichung ergibt sich

$$\partial_t u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = -cy'(x - ct) - y''(x - ct) \stackrel{!}{=} -1.$$

Die Substitution $z := x - ct$ führt zu

$$y''(z) + cy'(z) = 1.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Das charakteristische Polynom ist hierbei gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda = \lambda(\lambda + c)$$

Mithin ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_{\text{hom}}(z) = k_1 e^{-cz} + k_2 \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, bietet sich der Ansatz vom *Typ der rechten Seite* $y_p(z) = az$ mit $a \in \mathbb{R}$ an. Einsetzen in die Gleichung und Koeffizientenvergleich zeigt, dass eine partikuläre Lösung durch $y_p(z) = \frac{z}{c}$ gegeben ist. Die allgemeine Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung ist demnach

$$y(z) = y_{\text{hom}}(z) + y_p(z) = k_1 e^{-cz} + k_2 + \frac{z}{c} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

Schließlich erhalten wir die folgenden wandernden Wellen-Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung:

$$u(x, t) = y(x - ct) = k_1 e^{-cx + c^2 t} + k_2 + \frac{x}{c} - t \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$