

HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG ELEKTROTECHNIK UND INFORMATIONSTECHNIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZUM 7. ÜBUNGSBLATT

AUFGABE 1 (TUTORIUM)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Es liegt eine eindimensionale Wellengleichung vor. Setzen wir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := x$, so lautet das gegebene Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= x^2 = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= x = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Lösungsformel der eindimensionalen Wellengleichung aus der Vorlesung ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy \\ &= \frac{1}{2} ((x+t)^2 + (x-t)^2) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} y dy \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 2xt + t^2 + x^2 - 2xt + t^2) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x-t}^{y=x+t} \\ &= x^2 + t^2 + \frac{1}{4} [x^2 + 2xt + t^2 - (x^2 - 2xt + t^2)] \\ &= x^2 + t^2 + xt \end{aligned}$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Durch eine Probe können wir zudem (leicht) verifizieren, dass die Funktion $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, t) := x^2 + t^2 + xt$ die gegebene Wellengleichung löst.

AUFGABE 2 (TUTORIUM)

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes eine Lösung $u \in C^2([0, 1] \times [0, \infty))$ der eindimensionalen Wellengleichung

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, 1], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

LÖSUNGSVORSCHLAG

Seien $x \in (0, 1)$ und $t > 0$. Aus dem Separationsansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$ folgt

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = w''(t)v(x) - w(t)v''(x).$$

Folglich existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} \equiv \lambda.$$

Für v, w ergeben sich damit die Differentialgleichungen

$$w''(t) = \lambda w(t) \quad \text{für alle } t > 0, \quad (2)$$

$$v''(x) = \lambda v(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1). \quad (3)$$

$\lambda = 0$: Aus (3) folgt $v(x) = ax + b$ für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Wegen $0 = u(0, t) = v(0)w(t)$ ergibt sich $b = 0$ oder $w \equiv 0$. Mit $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = v'(1)w(t) = aw(t)$ erhalten wir $a = 0$ oder $w \equiv 0$. Somit ist $v \equiv 0$ oder $w \equiv 0$, also $u \equiv 0$. Aber $u \equiv 0$ löst die Wellengleichung (1) nicht.

$\lambda > 0$: Die allgemeine Lösung von (3) ist gegeben durch

$$v(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (x \in (0, 1))$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$.

Durch die Randbedingungen ergibt sich:

$$(i) \quad u(0, t) = 0 \rightsquigarrow 0 \stackrel{!}{=} v(0) = A + B, \text{ d.h. } v(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Ae^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad v'(x) = \sqrt{\lambda}A[e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}].$$

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \rightsquigarrow 0 \stackrel{!}{=} v'(1) = \sqrt{\lambda}A[e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}}]. \text{ Demnach gilt } A = 0 \text{ und somit } v \equiv 0 \text{ und } u \equiv 0. \\ \text{Widerspruch zu } u \text{ löst (1).}$$

$\lambda < 0$: Die allgemeine Lösung von (3) ist gegeben durch

$$v(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B \cos(\sqrt{-\lambda}x) \quad (x \in (0, 1))$$

mit Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$.

Durch die Randbedingungen ergibt sich:

- (i) $u(0, t) = 0 \rightsquigarrow 0 \stackrel{!}{=} v(0) = B. \rightsquigarrow v(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}x), v'(x) = \sqrt{-\lambda}A \cos(\sqrt{-\lambda}x).$
- (ii) $\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 \rightsquigarrow 0 \stackrel{!}{=} v'(1) = \sqrt{-\lambda}A \cos(\sqrt{-\lambda}).$ Um eine nichttriviale Lösung zu erhalten, muss daher die Bedingung $\cos(\sqrt{-\lambda}) = 0$ erfüllt sein, d.h. $\sqrt{-\lambda} \in \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{N}_0\right\}$ bzw. $\lambda \in \left\{-\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 : k \in \mathbb{N}_0\right\}.$

Demnach soll w die DGL (2) mit $\lambda = -\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ lösen. Die allgemeine Lösung von (2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} w(t) &= C \sin(\sqrt{-\lambda}t) + D \cos(\sqrt{-\lambda}t) \\ &= C \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t\right) + D \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t\right) \quad (t > 0) \end{aligned}$$

mit Konstanten $C, D \in \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{N}_0$. Durch die Randbedingungen ergibt sich:

- (i) $u(x, 0) = 0 \rightsquigarrow 0 \stackrel{!}{=} w(0) = D.$ Mithin ist $w(t) = C \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t\right),$
 $w'(t) = C\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi t\right).$
- (ii) $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v(x)w'(0) = \widehat{C} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right) \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi 0\right) = \widehat{C} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right)$ mit einer Konstanten $\widehat{C} \in \mathbb{R}.$ Durch die Wahl $\widehat{C} = 1$ und $k = 0$ erhalten wir daher die Lösung

$$u(x, t) := \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Eine Probe zeigt, dass die so definierte Funktion $u \in C^2([0, 1] \times [0, \infty))$ tatsächlich eine Lösung von (1) ist.